

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

РОБОЧА ПРОГРАМА

**методичні вказівки та індивідуальні завдання
до вивчення дисципліни “Вища математика”
для студентів заочної форми навчання**

Частина 1

Дніпропетровськ НМетАУ 2006

УДК 517(07)

Павленко А.В., Кагадій Л.П., Письменна Л.Є., Чуднов К.У. та ін. Робоча програма, методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни “Вища математика” для студентів заочної форми навчання. Частина 1. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2006. - 104 с.

Наведені рекомендації до вивчення дисципліни “Вища математика” для студентів заочного факультету; мета та завдання дисципліни; необхідний обсяг знань і умінь студентів у результаті її вивчення; методичні вказівки до вивчення кожного з розділів і література, що рекомендується; питання для самоконтролю, а також варіанти індивідуальних завдань, які виконуються студентами в процесі вивчення дисципліни.

Призначена для студентів заочного факультету усіх спеціальностей, крім економічних.

Упорядники:

А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Л.П. Кагадій, канд. фіз.-мат. наук, проф.,
К.У. Чуднов, канд. техн. наук, доц.,
Л.Є. Письменна, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
С.М. Максютенко, канд. техн. наук, доц.,
А.Г. Моня, канд. техн. наук, доц.,
Л.Є. Корзо, ст. викладач
Н.С. Подобєдова Н.С., асистент,
О.В. Білова, асистент,
І.Б. Кочеткова, асистент,
Л.Ф. Сушко, асистент.

Відповідальний за випуск

А.В. Павленко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент

В.П. Барвінов, к.т.н., доц. каф. ПМ та ОТ

Голова НМК

В.Є.Хричиков, д.т.н., проф.

Декан заочного ф-ту

В.Г.Чистяков, к.т.н, доц.

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РОБОТІ НАД ДИСЦИПЛІНОЮ “ВИЩА МАТЕМАТИКА”

Основна форма навчання студента-заочника – самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з таких елементів: вивчення матеріалу по підручнику, розв’язання задач, виконання контрольних робіт. На допомогу студентам академія організовує лекції та практичні заняття. Крім того, студент може розраховувати на усну консультацію викладача. Вказівки студенту також робляться в процесі рецензування контрольних робіт. Але студент повинен пам’ятати, що тільки при систематичній самостійній роботі допомога академії буде носити ефективний характер. Завершальний етап вивчення окремих частин дисципліни “Вища математика” – це здача заліків та іспитів у відповідності до навчального плану.

Вивчаючи матеріал по підручнику, треба переходити до наступного питання тільки після правильного зрозуміння попереднього, виконуючи на папері усі обчислення (в тому числі і ті, що пропущені у підручнику).

Треба приділяти особливу увагу визначенню основних понять. Студент повинен розбирати приклади, які пояснюють такі визначення та наводити аналогічні приклади самостійно.

При вивченні матеріалу за підручником корисно вести конспект, до якого записувати визначення, формулювання теорем, формули, рівняння і т.д. На полях конспекту відмічають питання, з якими треба звернутися до викладача.

Читання підручника повинно супроводжуватися розв’язанням задач, для чого рекомендується завести спеціальний зошит. Креслення можна виконувати від руки, але акуратно та відповідно даним умовам.

Якщо в процесі роботи по вивченню теоретичного матеріалу або при розв’язанні задач у студента виникають питання, відповіді на які він самостійно не може знайти (неясність термінів, формулювання теорем, розв’язок окремих задач), то він може звернутися до викладача за усною консультацією. В своїх запитаннях студент повинен точно вказати, в чому він зазнає утруднення. Якщо це теоретичне питання, то треба вказати

підручник, де розглянуто це питання та що його утруднює. Якщо склалося скрутне становище при розв'язанні задачі, то треба вказати характер цього утруднення, привести припущення відносно плану розв'язку.

В процесі вивчення дисципліни студент повинен виконати контрольні роботи, головна мета яких – надати студенту допомогу в його роботі. Рецензії на ці роботи дозволяють студенту судити про ступінь засвоєння відповідного розділу дисципліни.

З кожної контрольної роботи студент виконує ті завдання, які мають відношення до його варіанта. Номер варіанта збігається з останньою цифрою номера залікової книжки або студентського квитка. Наприклад, номер залікової книжки – 007239, отже треба виконати задачі варіанта № 9. Якщо остання цифра “0”, то виконується варіант №10.

Не треба починати виконувати контрольне завдання, не розв'язавши достатньої кількості задач по матеріалу, що відповідає цьому завданню.

Виконувати контрольні завдання студент повинен самостійно, інакше він не придбає необхідних знань і буде непідготовленим до заліків або іспитів.

Кожну контрольну роботу треба присилати (приносити) в академію у заочний деканат в окремому зошиті, на обкладинці якого обов'язково позначено номер контрольної роботи, назва дисципліни, прізвище та ініціали студента, його шифр (номер залікової книжки), факультет та групу, де навчається даний студент, домашня адреса.

Усі контрольні роботи за даний семестр повинні подаватися на кафедру не пізніше як за 10 діб до початку екзаменаційної сесії.

Після перевірки контрольних робіт треба зробити усі виправлення і доповнення, на які вказав рецензент.

Без прорецензованих та захищених контрольних робіт, де зроблені усі виправлення і доповнення студент не допускається до заліків або іспитів.

**Програма дисципліни “ВИЩА МАТЕМАТИКА”
(1 семестр)**

1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. Поняття матриці:

Лінійні операції над матрицями. Транспонування матриць. Добуток матриць. Обернена матриця. Поняття визначника. Мінор та алгебраїчне доповнення. Властивості та обчислення визначника.

2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

Розв'язок системи за методом Крамера та матричним методом. Однорідна система лінійних рівнянь. Розв'язок системи однорідних рівнянь.

3. Векторна алгебра:

Вектори. Лінійні дії над векторами. Властивості лінійних операцій над векторами. Колінеарні вектори. Скалярний добуток векторів.

4. Пряма лінія на площині:

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між прямими. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки. Загальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.

5. Криві другого порядку:

Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола. Загальне рівняння лінії другого порядку. Перетворення координат.

6. Площина та пряма у просторі:

Поняття рівняння поверхні. Рівняння площини. Дослідження загального рівняння площини. Кут між площинами. Умова паралельності площин. Умова перпендикулярності площин. Відстань від точки до площини. Пряма у просторі. Канонічні рівняння прямої у просторі. Кут між прямими. Умова паралельності прямих. Умова перпендикулярності прямих. Взаємне розміщення прямої і площини. Паралельність прямої та площини. Перпендикулярність прямої і площини.

7. Поверхні другого порядку:

Еліпсоїд. Однопорожнинний гіперболоїд. Двопорожнинний гіперболоїд. Еліптичний параболоїд. Конус. Гіперболічний параболоїд. Еліптичний, гіперболічний та параболічний циліндри.

2. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1. Числові множини. Числова вісь. Абсолютна величина числа. Основні властивості абсолютних величин. Окіл точки.

2. Поняття функції:

Поняття функціональної залежності. Способи завдання функції. Елементарні функції та їх класифікація. Парні й непарні функції. Обмеженість. Монотонність. Періодичність. Поняття оберненої та складної функцій.

3. Числові послідовності та їх границі:

Поняття числової послідовності. Обмежені та необмежені послідовності. Нескінченно великі та нескінченно малі послідовності. Основні властивості нескінченно малих послідовностей. Збіжні послідовності. Основні властивості збіжних послідовностей. Монотонні послідовності. Число e .

4. Границі функції:

Поняття граничного значення функції. Геометрична інтерпретація границі функції у точці.

5. Нескінченно малі функції:

Поняття нескінченно малої функції. Властивості нескінченно малих функцій. Класифікація нескінченно малих функцій. Нескінченно великі функції.

6. Основні теореми про границі.

7. Перша важлива границя. Друга важлива границя.

8. Неперервність функції:

Означення. Класифікація точок розриву. Основні властивості неперервної в точці функції. Неперервність функції на проміжку.

9. Похідна функції. Її геометричний та фізичний зміст:
Поняття похідної. Геометричний зміст похідної. Фізичний зміст похідної.
10. Диференційованість функції:
Поняття диференційованості функції у точці. Зв'язок між поняттями диференційованості та неперервності.
11. Основні правила диференціювання.
12. Похідна складної та оберненої функцій.
13. Похідні основних елементарних функцій:
Похідна степеневі функції. Похідна логарифмічної функції.
Похідна показникової функції. Похідні тригонометричних функцій.
Похідні обернених тригонометричних функцій.
14. Похідна неявно заданої функції.
15. Диференціал функції.
Означення диференціала функції. Геометричний зміст диференціала функції. Інваріантність форми першого диференціала. Формули та правила обчислення диференціалів. Наближені обчислення за допомогою диференціала.
16. Похідні та диференціали вищих порядків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1985, т. 1, 2.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Физматгиз, 1978.
5. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984.

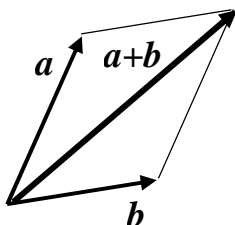
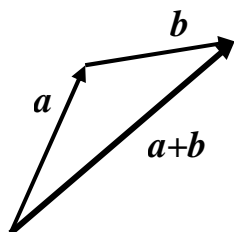
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
7. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Наука, 2000, ч. 1,2.
9. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. – К.: Либідь, 1994.
10. Рудавський Ю.К., Костробій П.П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – Львів, 1999.
11. Кагадій Л.П., Павленко А.В., Чуднов К.У. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 1,2: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ, НМетАУ. – 2004.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

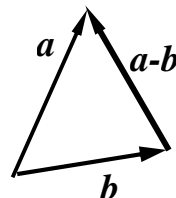
ВЕКТОРИ

Дії над векторами

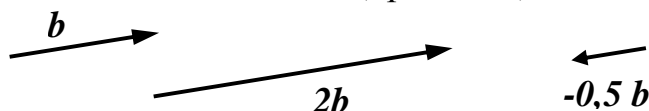
1. Додавання векторів



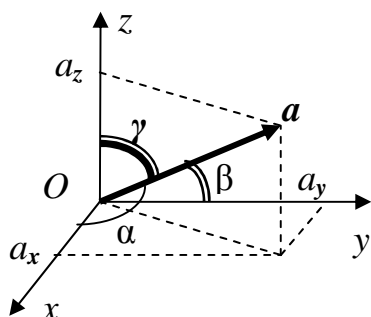
2. Віднімання векторів



3. Множення на число (приклади)



Вектори у декартовій системі координат



$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x; a_y; a_z) ,$$

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) .$$

Довжина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Напрямні косинуси

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} , \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} , \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} .$$

Дії над векторами, заданими у координатній формі

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z) ,$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z) ,$$

$$l \vec{a} = (l a_x; l a_y; l a_z) .$$

Умова колінеарності векторів

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} .$$

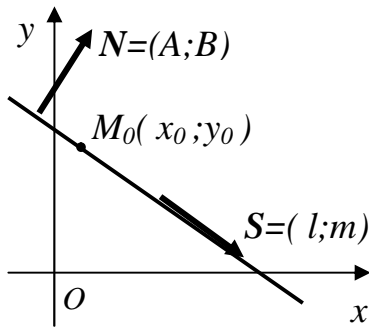
Скалярний та векторний добутки векторів

добуток	скалярний	векторний
позначення	$\vec{a} \times \vec{b}, (\vec{a}, \vec{b})$	$\vec{a} \wedge \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$
тип величини	число	вектор
означення	$ \vec{a} \vec{b} \cos(\vec{a}, \vec{b})$	$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, якщо: <ol style="list-style-type: none"> 1) \vec{c} перпендикулярний векторам \vec{a} и \vec{b}; 2) трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – права; 3) $\vec{c} = \vec{a} \vec{b} \sin(\vec{a}, \vec{b})$
властивості	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $(l \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (l \vec{b}) = l (\vec{a} \times \vec{b})$ $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{a} ^2$	$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ $(l \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (l \vec{b}) = l (\vec{a} \wedge \vec{b})$ $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$ $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$
добутки ортів	$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{i} = \vec{0}$	$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{0}$
обчислення в ДСК	$\vec{a} \times \vec{b} = a_x \vec{b}_y - a_y \vec{b}_x + a_z \vec{b}_z$	$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
основні задачі	<p>довжина вектора</p> $ \vec{a} = \sqrt{\vec{a} \times \vec{a}}$ <p>косинус кута між векторами</p> $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} }$ <p>проекція вектора на інший вектор</p> $pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{ \vec{b} }$ <p>умова перпендикулярності</p> $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$	<p>площа паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} та \vec{b}</p> $S = \vec{a} \wedge \vec{b} $ <p>площа трикутника</p> $S_D = \frac{ \vec{a} \wedge \vec{b} }{2}$ <p>висота паралелограма</p> $h_a = \frac{S}{ \vec{a} } = \frac{ \vec{a} \wedge \vec{b} }{ \vec{a} }$ <p>висота трикутника</p> $h_a = \frac{2S_D}{ \vec{a} } = \frac{ \vec{a} \wedge \vec{b} }{ \vec{a} }$

Мішаний добуток векторів

позначення	$\vec{r} \vec{r} \vec{r}$ $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ або $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
означення	$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \times \vec{c}$
властивості	$\vec{r} \vec{r} \vec{r} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}$
обчислення у ДСК	$\vec{r} \vec{r} \vec{r} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
основні задачі	<p>умова компланарності трьох векторів</p> $\vec{r} \vec{r} \vec{r} = 0$ <p>орієнтація трійки векторів:</p> $\vec{r} \vec{r} \vec{r} > 0 \quad \text{— права трійка ;}$ $\vec{r} \vec{r} \vec{r} < 0 \quad \text{— ліва трійка}$ <p>об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$</p> $V_{\text{паралелепіпеда}} = \vec{r} \vec{r} \vec{r} $ <p>об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$</p> $V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} \vec{r} \vec{r} \vec{r} $ <p>висота паралелепіпеда</p> $h = \frac{V_{\text{паралелепіпеда}}}{S_{\text{грані}}} = \frac{ \vec{r} \vec{r} \vec{r} }{ \vec{a} \wedge \vec{b} }$ <p>висота піраміди</p> $h = \frac{3V_{\text{піраміди}}}{S_{\text{грані}}} = \frac{ \vec{r} \vec{r} \vec{r} }{ \vec{a} \wedge \vec{b} }$

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

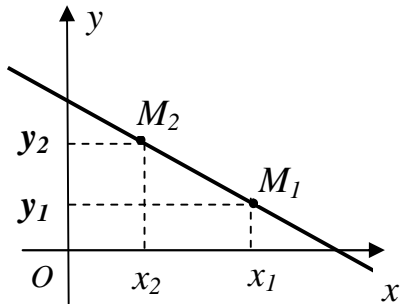


Найпростіше рівняння
 $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Загальне рівняння
 $Ax + By + C = 0$.

Канонічне рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$



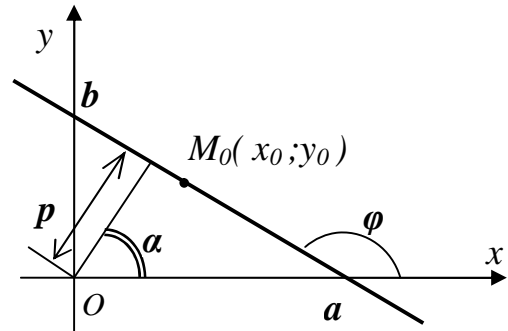
Умова паралельності прямих

Умова перпендикулярності прямих

Кут q між прямими (гострий)

Відстань від точки M до прямої

або



Рівняння з кутовим коефіцієнтом
 $y = kx + b$, $k = \operatorname{tg} j$.

Рівняння прямої, яка проходить у заданому напрямку (рівняння в'язки)
 $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Рівняння у відрізках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Нормальне рівняння

$$x \cos a + y \sin a - p = 0.$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$$k_2 = k_1.$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

$$\operatorname{tg} q = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

$$d(M) = |x_M \cos a + y_M \sin a - p|,$$

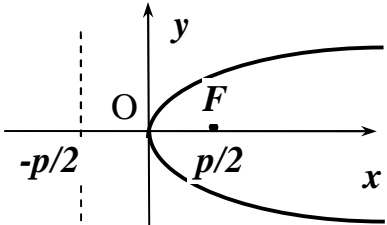
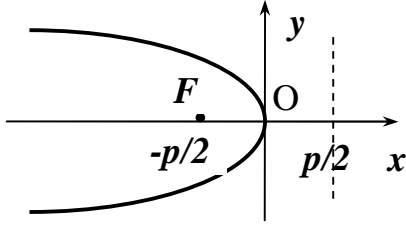
$$d(M) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

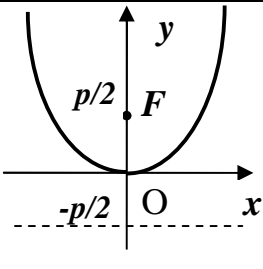
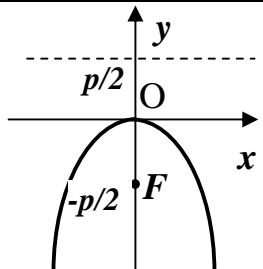
Еліпс та гіпербола

крива	<i>Еліпс з фокусами на вісі Oх</i>	<i>Гіпербола з фокусами на вісі Oх</i>
рівняння	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
піввісі ($2a, 2b$ – вісі)	a – велика b – мала	a – дійсна b – уявна
відстань від центра до фокусів	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
координати фокусів	$F_1(c; 0); F_2(-c; 0)$	$F_1(c; 0); F_2(-c; 0)$
ексцентриситет	$e = \frac{c}{a} \quad (e < 1)$	$e = \frac{c}{a} \quad (e > 1)$
рівняння директрис	$x = \pm \frac{a}{e}$	$x = \pm \frac{a}{e}$
рівняння асимптот	—	$y = \pm \frac{b}{a} x$
відстані від точки М до фокусів	$F_1M = r_1 = a - e x_M$ $F_2M = r_2 = a + e x_M$	$F_1M = r_1 = a - e x_M $ $F_2M = r_2 = a + e x_M $
рисунок		

Параболи, симетричні відносно осі Ох

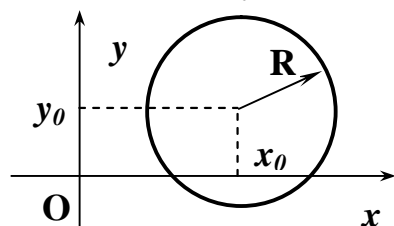
рівняння	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$
координати фокуса	$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$
рівняння директриси	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$
рисунок		

Параболи, симетричні відносно осі Оу

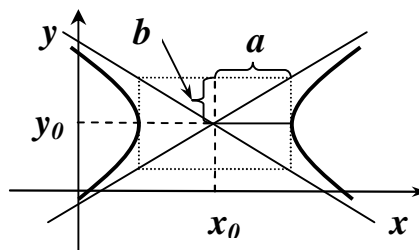
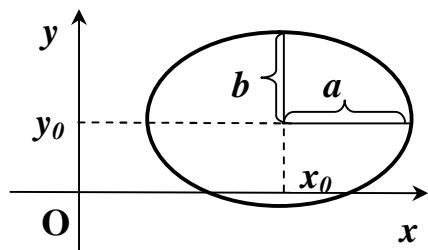
рівняння	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
координати фокуса	$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$
рівняння директриси	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
рисунок		

Зсунені криві

Коло $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

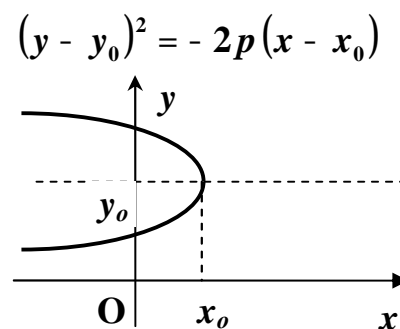
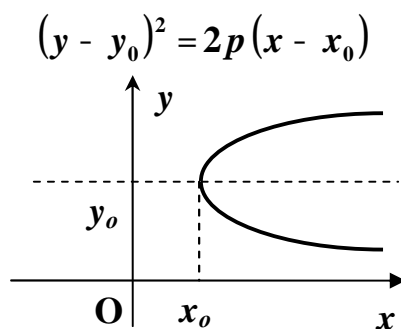
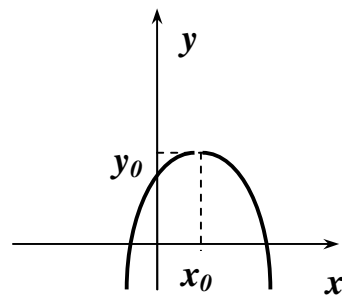
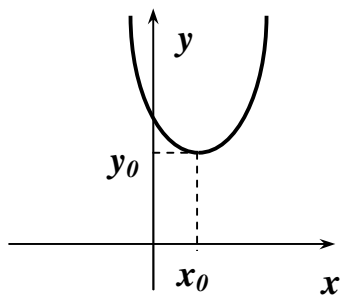


Еліпс $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ Гіпербола $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$



Параболи $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

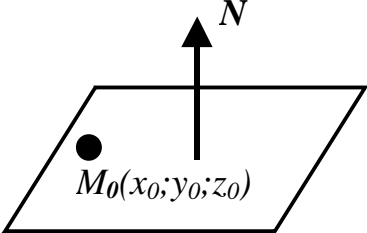
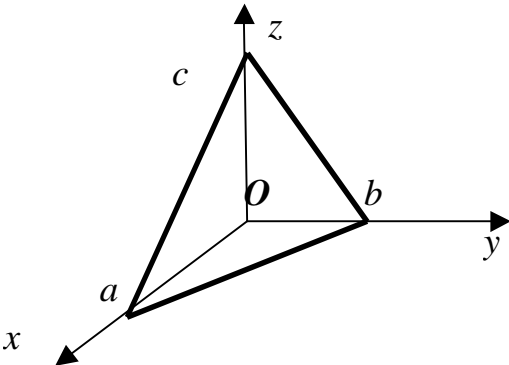
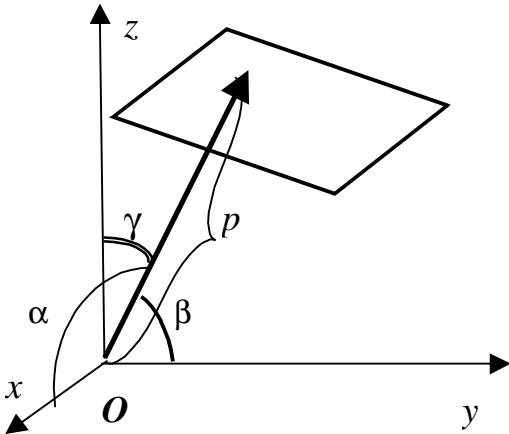
$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$



ПРЯМІ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ

Будь-яке лінійне рівняння зі змінними x , y , z можна розглядати як рівняння у декартових координатах площини у просторі. Різні форми рівняння площини наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Назва	Загальний вигляд	Геометричний зміст параметрів
канонічне (рівняння площини, яка проходить через задану точку)	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 	А, В, С-координати вектора нормалі до площини; x_0, y_0, z_0 - координати точки, яка належить площині
загальне	$Ax + By + Cz + D = 0$	А, В, С-координати вектора нормалі до площини
у відрізках на осях	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 	a, b, c - координати точок перетину площини з осями Ox, Oy та Oz відповідно
нормальне	$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ 	α, β, γ - кути, які створює нормаль проведена з початку координат з осями Ox, Oy та Oz

рівняння площини, яка проходить через три точки	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$	$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ та (x_3, y_3, z_3) - координати трьох точок, які належать площині
--	---	--

Якщо у рівнянні відсутній доданок з якою-небудь змінною, то площина паралельна відповідній координатній осі; наприклад, площина, яку задано рівнянням $Ax + Cz + D = 0$, паралельна осі Oy .

Якщо у рівнянні відсутні доданки з двома змінними, то площина паралельна відповідній координатній площині; наприклад, площина, яку задано рівнянням $Ax + D = 0$, паралельна площині Oyz .

Якщо у загальному або у нормальному рівнянні площини відсутній вільний член, тобто рівняння має вигляд $Ax + By + Cz = 0$, площина проходить через початок координат.

Наведемо рівняння координатних площин :

$$Oxy - z = 0 ; \quad Oyz - x = 0 ; \quad Oxz - y = 0 .$$

Кут між площинами a та b дорівнює гострому куту між їх нормальними \bar{N}_a та \bar{N}_b , тобто

$$\cos(a \angle b) = \frac{|\bar{N}_a \bar{N}_b|}{|\bar{N}_a| |\bar{N}_b|} = \frac{|A_a A_b + B_a B_b + C_a C_b|}{\sqrt{A_a^2 + B_a^2 + C_a^2} \times \sqrt{A_b^2 + B_b^2 + C_b^2}} .$$

Умовою паралельності двох площин є колінеарність їх нормалей :

$$a \parallel b \hat{=} \bar{N}_a \parallel \bar{N}_b , \text{ тобто } \frac{A_a}{A_b} = \frac{B_a}{B_b} = \frac{C_a}{C_b} .$$

Умовою перпендикулярності двох площин є перпендикулярність їх нормалей :

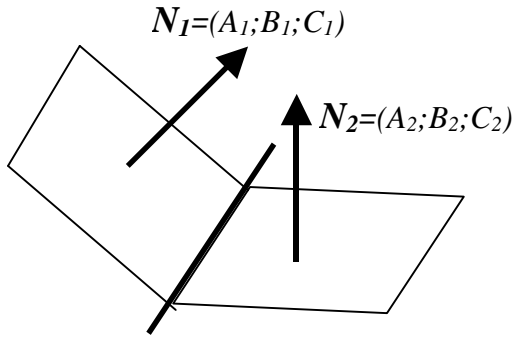
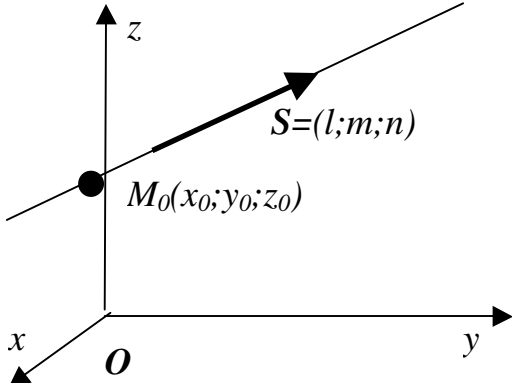
$$a \perp b \hat{=} \bar{N}_a \perp \bar{N}_b , \text{ тобто } \bar{N}_a \times \bar{N}_b = 0 .$$

Відстань від точки M до площини, заданої за допомогою рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$, обчислюється за формулою

$$d(M) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряму у просторі ми будемо розглядати як лінію перерізу двох площин; лінію, будь-які точки якої задають вектор, колінеарний заданому, або траєкторію руху зі сталою швидкістю заданої точки. Різні форми рівнянь прямої наведені у таблиці 2.

Таблиця 2

Назва	Загальний вигляд рівнянь, рисунок	Геометричний зміст параметрів
загальні	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 	Пряма розглядається як лінія перерізу двох площин з нормальними векторами $\vec{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ та $\vec{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$
канонічні	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ 	l, m, n - координати напрямного вектора прямої; (x_0, y_0, z_0) - координати точки, яка належить прямій

Продовження табл.2

параметричні	$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$	l, m, n - координати напрямного вектора прямої; (x_0, y_0, z_0) - координати точки, яка належить прямій.
рівняння прямої, яка проходить через дві точки	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$	(x_1, y_1, z_1) та (x_2, y_2, z_2) - координати двох точок, які належать прямій

Рівняння прямої, перпендикулярної до осі Ox , мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Рівняння прямої, перпендикулярної до осі Oy , мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Рівняння прямої, перпендикулярної до осі Oz , мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0. \end{cases}$$

Кут між двома прямими – це гострий кут, який створено напрямними векторами цих прямих

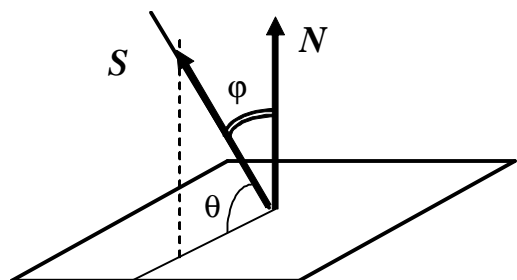
$$\cos(s_1, s_2) = \frac{|\overline{S_1 \times S_2}|}{|\overline{S_1}| |\overline{S_2}|}.$$

Умовою паралельності двох прямих є колінеарність їх напрямних векторів :

$$s_1 \parallel s_2 \Leftrightarrow \overline{S_1} \parallel \overline{S_2}, \text{ тобто } \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

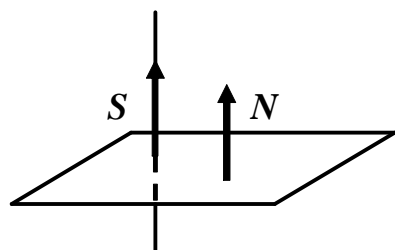
Умовою перпендикулярності двох прямих є перпендикулярність їх напрямних векторів :

$$s_1 \wedge s_2 \hat{=} \overline{S_1} \wedge \overline{S_2}, \text{ тобто } \overline{S_1} \times \overline{S_2} = \mathbf{0}.$$



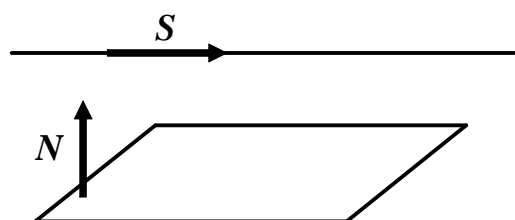
Гострий кут φ , який створений нормаллю до площини, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, та напрямним вектором прямої, доповнює кут q між прямою та площиною до 90° :

$$\sin q = \cos j = \frac{|\overline{S} \times \overline{N}|}{|\overline{S}| |\overline{N}|} = \frac{|A \times l + B \times m + C \times n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$



Умовою перпендикулярності прямої та площини є колінеарність нормалі до площини та напрямного вектора прямої :

$$s \wedge a \hat{=} \overline{S} \wedge \overline{N}, \text{ тобто } \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

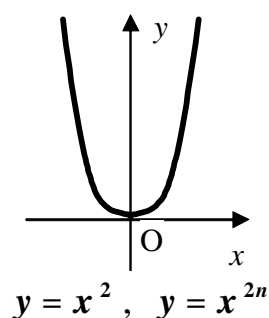
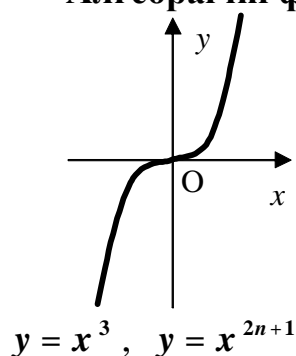
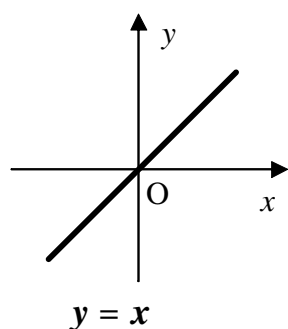


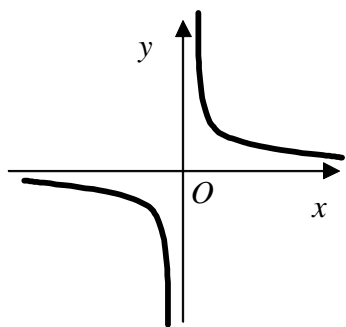
Умовою паралельності прямої та площини є перпендикулярність нормалі до площини та напрямного вектора прямої :

$$s \parallel a \hat{=} \overline{S} \wedge \overline{N}, \text{ тобто } \overline{S} \times \overline{N} = \mathbf{0}.$$

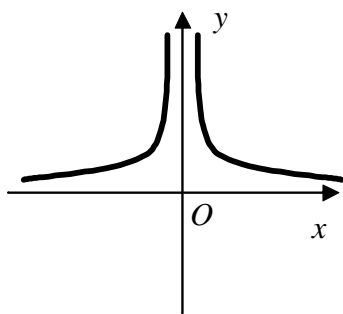
ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Алгебраїчні функції

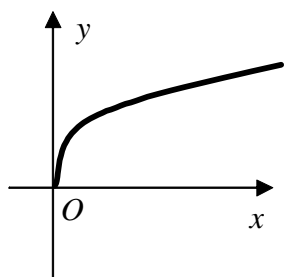




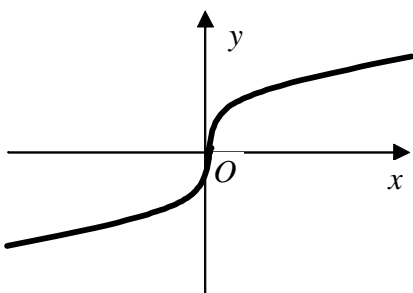
$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x^{2n+1}}$$



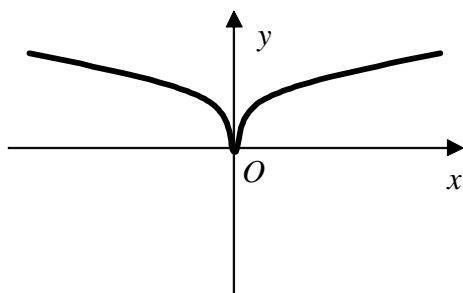
$$y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{1}{x^{2n}}$$



$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt[2n]{x}$$

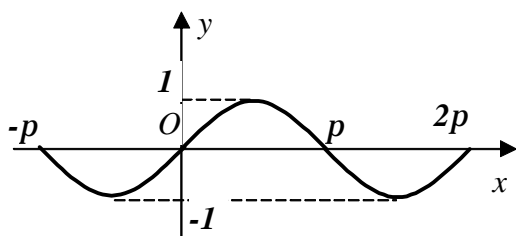


$$y = \sqrt[3]{x}, \quad y = \sqrt[2n+1]{x}$$

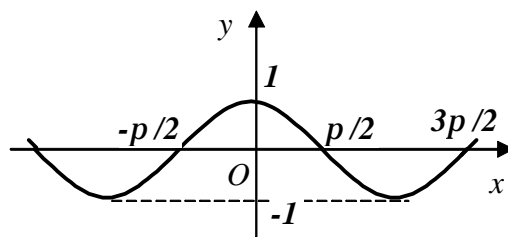


$$y^3 = x^2, \quad y^{2n+1} = x^{2m} \\ (2n+1 > 2m)$$

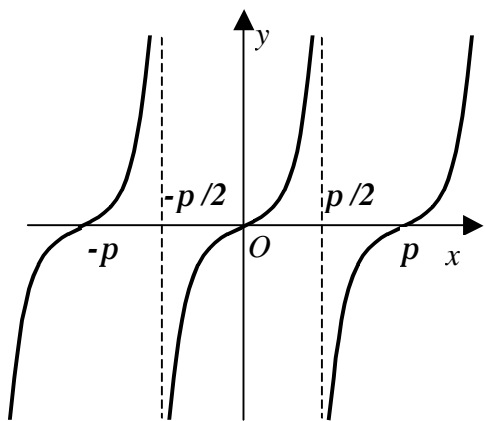
Трансцендентні функції



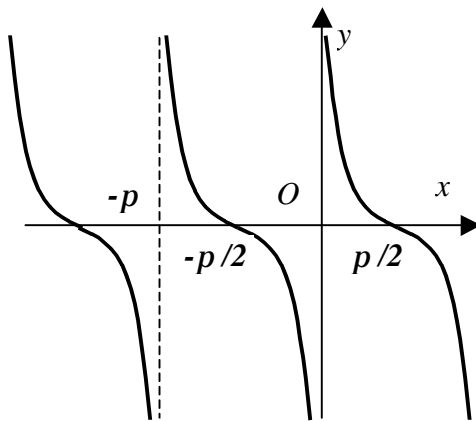
$$y = \sin x$$



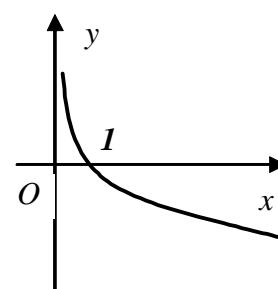
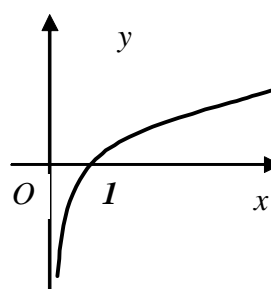
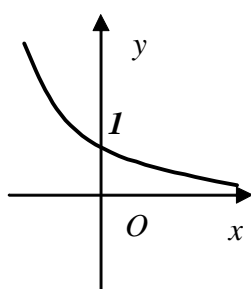
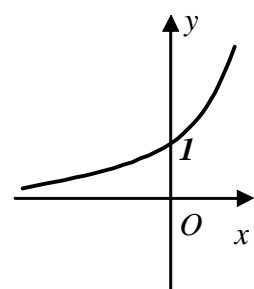
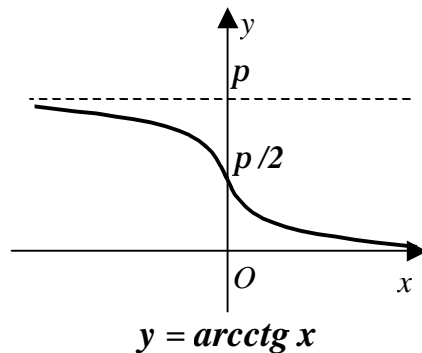
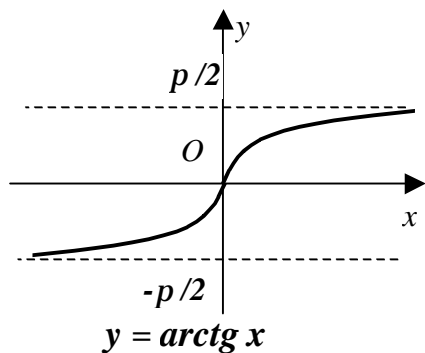
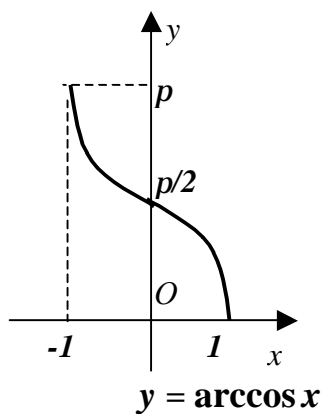
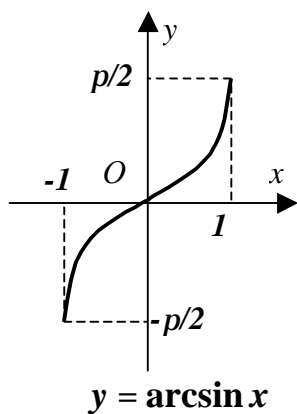
$$y = \cos x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$



$$y = \operatorname{ctg} x$$



ГРАНИЦІ

Перша важлива границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Друга важлива границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

Вигляд функції	Граничне значення змінної	Невизначеність	Метод перетворення
1	2	3	4
частка двох поліномів	$x \rightarrow \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ або $\frac{0}{0}$	поділити чисельник та знаменник на найвищий степінь змінної та виділити нескінченно малі доданки
частка двох поліномів	$x \rightarrow x_0$	$\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$	розкласти чисельник та знаменник на множники, скоротити дріб на $(x - x_0)$
сума або різниця двох дробів	$x \rightarrow x_0$	$(\infty - \infty)$	перетворити вираз на один дріб; за наявності невизначеності вигляду $(0/0)$ скоротити на $(x - x_0)$
вираз з факторіалами	$n \rightarrow \infty$	$(\infty - \infty)$ або $\frac{\infty}{\infty}$ або $\frac{0}{0}$	обрати факторіал найменшого виразу, інші за рекурентною формулою звести до обраного
дріб з коренями	$x \rightarrow \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ або $\frac{0}{0}$	поділити чисельник та знаменник на найвищий степінь змінної

Типовой приклад

5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2 + 3x - 8} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x + 5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 6x + 8} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 4} = \frac{12}{-2} = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3} - \frac{2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{\infty}{\infty} = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1) - 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(x - 1)} =$$

$$= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n + 2)! - n!) = (\infty - \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n!(n + 1)(n + 2) - n!) = \lim_{n \rightarrow \infty} n!(n^2 + 3n + 1) = \infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)! + n!}{(n + 2)!} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n + 1) + n!}{(n + 1)(n + 2)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n + 2)}{n!(n + 1)(n + 2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + 1} =$$

$$= \frac{0}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{3x^4 + x}}{\sqrt{x^2 + 7}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x} + \frac{\sqrt[4]{3x^4 + x}}{x}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2 + 1}{x^3}} + \sqrt[4]{\frac{3x^4 + x}{x^4}}}{\frac{x}{\sqrt{\frac{x^2 + 7}{x^2}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + \sqrt[4]{3 + \frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}} = \sqrt[4]{3}$$

1	2	3	4
дріб з коренями	$x \in x_0$	$x \in \mathbb{R}$	позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення та виділити множник $(x - x_0)$, скоротити на нього
вираз з коренями	$x \in \mathbb{R}$	$(x - x_0)$	позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення; якщо невизначеність не зникне, а трансформується у (x/x_0) , поділити на старший степінь змінної (з урахуванням добування коренів)
вираз з тригонометричними функціями	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$ $(0 \times x)$	перетворити суми тригонометричних функцій на добутки; множники, границя котрих не дорівнює 0 або ∞ , замінити цими границями; для кожного множника, який прямує до 0, побудувати 1-у важливу границю

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 9} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{2x+3} - 3)(\sqrt{2x+3} + 3)}{(x^2 - 9)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{(x^2 - 9)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x + 3)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x) &= (\infty - \infty) = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x) \sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)^2} + x \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)^2} + x \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{x^6 + x^5 + x^3 + x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{\frac{\sin 5x}{5x} \times 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{\frac{\sin 5x}{5x} \times 5x} = \frac{2}{5} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x \times \sin x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \times 3x \times \frac{\sin x}{x} \times x}{x^2} = \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \times x}{x^2} = 6
\end{aligned}$$

1	2	3	4
вираз з тригонометричними функціями	$x \in x_0^{-1} \cup \emptyset$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ або $(0, x)$	перетворити суми тригонометричних функцій на добутки; множники, границя котрих не дорівнює 0 або ∞ , замінити цими границями; зробити заміну змінної $x - x_0 = t$ або $x_0 - x = t$ ($t \in \mathbb{R}$); для кожного множника, який прямує до 0, побудувати першу важливу границю при $x \in \mathbb{R}$ зробити заміну $\frac{1}{x} = t, t \in \mathbb{R}$
степеневопоказникова функція	$x \in \mathbb{R}; x \in x_0$	(1^x)	основу записати як суму 1 та нескінченно малої функції, побудувати другу важливу границю та перейти до границі у показнику
вираз з логарифмом	аргумент логарифма прямує до 1	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	записати аргумент логарифма як суму 1 та нескінченно малої функції, побудувати другу важливу границю під знаком логарифма
різниця логарифмів еквівалентних величин	$x \in \mathbb{R}; x \in x_0$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; (0, x); (x - x)$	перетворити різницю логарифмів на логарифм частки та побудувати під знаком логарифма другу важливу границю

[illegible]

ПОХІДНІ

Похідні основних елементарних функцій

$$1. (x^n)' = n x^{n-1}$$

$$2. (x)' = 1$$

$$3. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$6. (e^x)' = e^x$$

$$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$8. (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

$$9. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$10. (\sin x)' = \cos x$$

$$11. (\cos x)' = -\sin x$$

$$12. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$13. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$14. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$16. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$17. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Похідні складених елементарних функцій

$$1a. (u^n)' = n u^{n-1} \cdot u'$$

$$3a. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$4a. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$5a. (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$6a. (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$7a. (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$$

$$8a. (\lg u)' = \frac{1}{u \ln 10} \cdot u'$$

$$9a. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$10a. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$11a. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$12a. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$13a. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$14a. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$15a. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$16a. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$17a. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦЮВАННЯ

$$1. C' = 0$$

$$2. (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \pm C)' = u'$$

$$3. (uv)' = u'v + v'u$$

$$(C \times u)' = C \times u'$$

$$(C \times x)' = C$$

$$4. \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{C} \right)' = \frac{u'}{C}$$

$$\left(\frac{x}{C} \right)' = \frac{1}{C}$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №1

Тема 1. Матриці. Визначники. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Література: [1] глава V, § 1,2,3, [10], [11]; [10], розділ 2.

Починаючи вивчення цього розділу студент повинен познайомитися з визначенням матриці розміром $m \times n$, видами матриць, найпростішими діями з матрицями, визначниками 2-го і 3-го порядків, а також з визначником n -го порядку. Після цього він повинен навчитися розв'язувати за допомогою визначників системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера.

Матрицею розміром $m \times n$ називають сукупність $m \times n$ чисел, які розташовані у вигляді прямокутної таблиці, що містить m рядків та n стовпців:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо $m = n$, то матриця називається квадратною.

Визначником 2-го порядку, який відповідає квадратній матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ називається число } a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Визначник 2-го порядку будемо позначати

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Визначником 3-го порядку, який відповідає матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ називається число } a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Визначник 3-го порядку позначається

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Якщо задана система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

де a_{ij} , b_i - сталі числа, а x_1, x_2, x_3 - невідомі, то її можна вирішити за правилом Крамера за формулами:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{D}.$$

Тут D - визначник системи.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Система має єдиний розв'язок, якщо $D \neq 0$.

Покажемо приклад вирішення системи

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}.$$

Розв'язання. Знаходимо D .

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Оскільки $D \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Далі

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 24 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 13 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 24 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 13 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 24 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 13 \end{vmatrix} = -4.$$

Далі знаходимо $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{2}{-1} = -2$,

$x_3 = \frac{D_{x_3}}{D} = \frac{-4}{-1} = 4$. Зробимо перевірку.

Для цього підставимо значення x_1, x_2, x_3 в кожне з рівнянь системи.

$$\begin{aligned} 2(+1) - 3(-2) + 4 \times 4 &= 24 & 24 &= 24 \\ 1 + (-2) + 4 &= 3 & \text{Р} & 3 = 3 \\ 1 - 2(-2) + 2 \times 4 &= 13 & 13 &= 13. \end{aligned}$$

Система розв'язана правильно.

Тема 2. Елементи векторної алгебри

Література [10], розділ 3.

Вивчивши цей розділ, студент повинен знати означення вектора, модуля вектора, колінеарності та компланарності векторів, рівності векторів. Він повинен вміти знаходити координати вектора, робити лінійні операції з векторами, знати визначення і вміти застосовувати на практиці

скалярний, векторний та змішаний добуток векторів. Ми будемо позначати вектор \overline{AB} , де A - початок вектора, B - його кінець, або однією \overline{a} теж з рисочкою зверху:

Розглянемо таке завдання.

Задано чотири вершини піраміди $A_1 A_2 A_3 A_4$.

Знайти: 1. Довжину ребра $A_1 A_2$.

2. Кут між ребрами $A_1 A_2$ та $A_1 A_4$.

3. Площу грані $A_1 A_2 A_3$.

4. Об'єм піраміди.

5. Зробити креслення.

Приклад.

$$A_1(4;2;5), \quad A_2(0;7;2), \quad A_3(0;2;7), \quad A_4(1;5;0).$$

Розв'язання.

1. Довжину ребра $A_1 A_2$ знайдемо як модуль вектора $\overline{A_1 A_2}$.

Спочатку знайдемо координати цього вектора (з координат кінця віднімаємо координати початку). $\overline{A_1 A_2} = (-4;5;-3)$.

А потім знаходимо модуль цього вектора

$$|\overline{A_1 A_2}| = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

2. Кут j між ребрами $A_1 A_2$ і $A_1 A_4$ знайдемо як кут між векторами $\overline{A_1 A_2}$ і $\overline{A_1 A_4}$ за формулою

$$\cos j = \frac{\overline{A_1 A_2} \times \overline{A_1 A_4}}{|\overline{A_1 A_2}| \times |\overline{A_1 A_4}|}.$$

Визначаємо координати вектора $\overline{A_1 A_4} = (-3;3;-5)$.

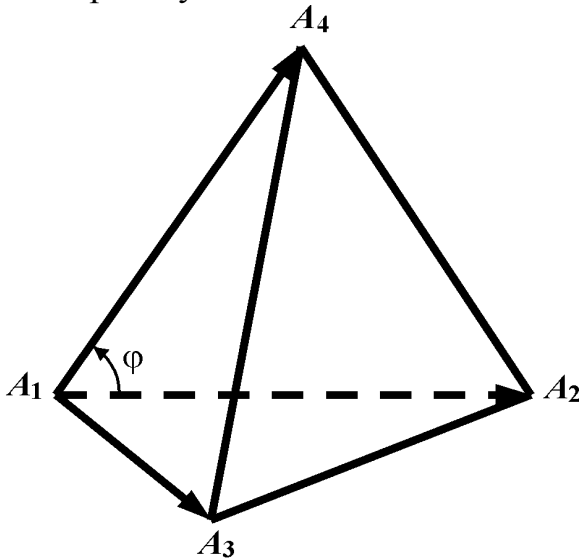
$$\cos j = \frac{12 + 15 + 15}{5\sqrt{2} \times \sqrt{43}} = \frac{42}{5\sqrt{86}} \approx 0,9058.$$

Далі за таблицями знаходимо

$$j = \arccos 0,9058 \approx 0,4375.$$

Значення кута j дається в радіанах.

3. Проміжні результати ми, як правило, одержуємо аналітично і рисунок на цій стадії завжди є допоміжним. Схематично накреслимо піраміду.



Площу грані $A_1A_2A_3$ знайдемо, на основі визначення векторного добутку векторів, як половину модуля векторного добутку векторів $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_3}$, тобто

$$S_{DA_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}|.$$

Спочатку визначимо координати вектора $\overline{A_1A_3} = (-4; 0; 2)$.

Тепер знайдемо векторний добуток векторів

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10\bar{i} + 20\bar{j} + 20\bar{k}.$$

А потім знаходимо $|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}| = \sqrt{100 + 400 + 400} = 30$. Отже, площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює

$$S = \frac{1}{2} \times 30 = 15 \text{ (од.}^2\text{)}.$$

4. Об'єм піраміди визначимо як 1/6 модуля змішаного добутку векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ і $\overline{A_1A_4}$, тобто

$$V_{\text{пір.} A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6} |(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}) \times \overline{A_1A_4}|.$$

Спочатку знаходимо змішаний добуток векторів

$$(\overrightarrow{A_2A_3} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \times \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -70.$$

Отже, об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ дорівнює

$$V = \frac{70}{6} \approx 11,6667 \text{ (од.}^3\text{)}.$$

Тема 3. Аналітична геометрія на площині

Література: [1], [10], [11].

Перш ніж почати вивчення аналітичної геометрії, слід засвоїти що таке система координат, навчитися будувати точку за заданими координатами та визначати координати точки, знаючи її положення на площині. Оскільки кожна лінія розглядається як геометричне місце точок, що мають спільні властивості, то наступний етап вивчення – складення рівнянь ліній. Із означення рівняння лінії випливає, що якщо координати точки задовольняють рівнянню лінії, то точка належить їй, в противному разі – не належить. В аналітичній геометрії доводять, що будь-яка пряма лінія в декартовій системі координат визначається рівнянням першого степеня відносно координат x, y її довільної точки.

В аналітичній геометрії задачі розв'язують алгебраїчним шляхом, тому рисунки та геометричні побудови є допоміжними заходами.

Розглянемо задачу:

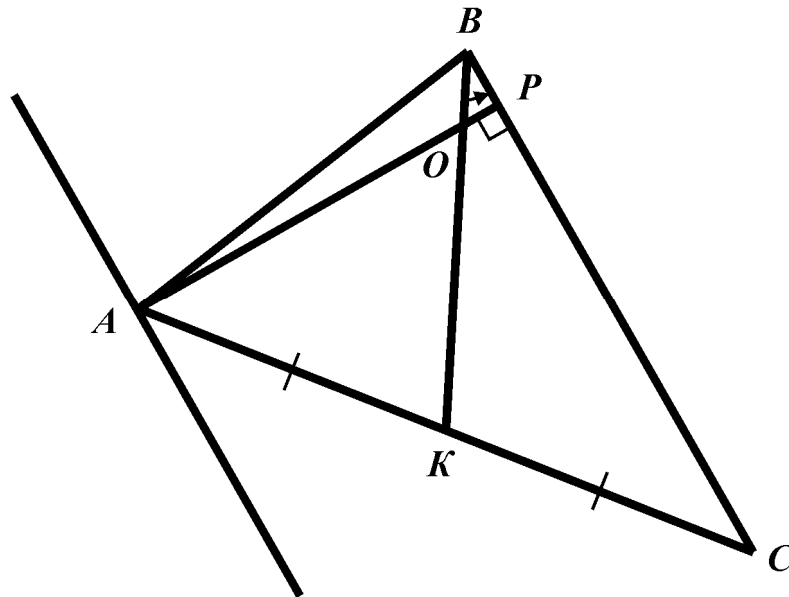
1. Задано координати вершин трикутника ABC :

$A (-2; -3), B (1; 6), C (6; 3)$. Знайти:

- 1) Рівняння сторони BC .
- 2) Рівняння медіани BK .
- 3) Довжину медіани BK .

- 4) Рівняння прямої, що проходить через вершину A паралельно стороні BC .
- 5) Рівняння висоти AP .
- 6) Довжину висоти AP .
- 7) Точку перетину медіани BK та висоти AP .
- 8) Кут KBC .
- 9) Площу трикутника ABC .

Зробити рисунок до задачі.



1. Розглянемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B}.$$

Рівняння прямої BC матиме вигляд:

$$\frac{y - 6}{3 - 6} = \frac{x - 1}{6 - 1} \Rightarrow \frac{y - 6}{-3} = \frac{x - 1}{5} \Rightarrow 5(y - 6) = -3(x - 1) \Rightarrow 5(y - 6) + 3(x - 1) = 0 \Rightarrow 3x + 5y - 33 = 0.$$

2. Точка K є серединою відрізка AC , тому

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2,$$

$$y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3 + 3}{2} = 0.$$

Складемо рівняння медіани BK :

$$\frac{y - y_B}{y_K - y_B} = \frac{x - x_B}{x_K - x_B} \text{ Р } \frac{y - 6}{0 - 6} = \frac{x - 1}{2 - 1} \text{ Р } \frac{y - 6}{-6} = \frac{x - 1}{1} \text{ Р } y - 6 = -6(x - 1) \text{ Р } 6x + y - 12 = 0.$$

3. Довжина медіани **BK** обчислюється за формулою:

$$|BK| = \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2},$$

$$|BK| = \sqrt{(2 - 1)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}.$$

4. Запишемо рівняння пучка прямих, що проходять через вершину **A**: $y - y_A = k(x - x_A)$, де k - кутовий коефіцієнт шуканої прямої, яка є паралельною до прямої **BC**. Тому $k = k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3 - 6}{6 - 1} = \frac{-3}{5}$.

Рівняння прямої, що проходить через точку **A** паралельно прямій **BC**, матиме вигляд: $y + 3 = -\frac{3}{5}(x + 2) \text{ Р } 5(y + 3) = -3(x + 2) \text{ Р } 3x + 5y + 21 = 0$.

5. Рівняння висоти **AP** – це рівняння прямої, що проходить через точку **A** перпендикулярно до прямої **BC**.

Запишемо рівняння пучка прямих, що проходять через точку **A**: $y - y_A = k(x - x_A)$. За умовою перпендикулярності прямих

$$k = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}, \quad \text{тому} \quad \text{рівняння} \quad \text{висоти} \quad \text{AP:}$$

$$y + 3 = \frac{5}{3}(x + 2) \text{ Р } 3y + 9 = 5x + 10 \text{ Р } 5x - 3y + 1 = 0.$$

6. Обчислимо довжину **AP** як відстань від точки **A** до прямої **BC**:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$|AP| = \frac{|3 \times (-2) + 5(-3) - 33|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{|-6 - 15 - 33|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{|-54|}{\sqrt{34}} = \frac{54}{\sqrt{34}}.$$

правильна

7. Для визначення точки перетину медіани **BK** і висоти **AP** необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6x + y - 12 = 0 \\ 5x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y = 12 \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}.$$

За формулами Крамера $x = \frac{D_x}{D}$; $y = \frac{D_y}{D}$,

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 5 = -23,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 1 = -35,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 60 = -66,$$

$$x = \frac{-35}{-23} = \frac{35}{23}; \quad y = \frac{-66}{-23} = \frac{66}{23}.$$

Одержали: $O\left(\frac{35}{23}; \frac{66}{23}\right)$.

8. Кут KBC обчислимо за формулою:

$$\operatorname{tg} B = \frac{k_{BC} - k_{BK}}{1 + k_{BC} \times k_{BK}},$$

$$k_{BC} = -\frac{3}{5} \text{ (див. п. 4).}$$

Кутовий коефіцієнт k_{BK} одержимо, перетворюючи загальне рівняння медіани до рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$6x + y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = -6x + 12 \Leftrightarrow k_{BK} = -6.$$

$$\text{Тоді } \operatorname{tg} B = \frac{-\frac{3}{5} - (-6)}{1 + \frac{3}{5} \times (-6)} = \frac{6 - \frac{3}{5}}{1 + \frac{18}{5}} = \frac{27}{23}, \quad \angle B = \operatorname{arctg} \frac{27}{23}.$$

9) Для обчислення площі трикутника ABC використовуємо формулу:

$$S_D = \frac{1}{2} a \times h_a, \text{ де } a = |BC|; \quad h_a = |AP| = \frac{54}{\sqrt{34}};$$

$$\begin{aligned} |BC| &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(6 - 1)^2 + (3 - 6)^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \\ &= \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}; \end{aligned}$$

$$S_D = \frac{1}{2} \times \sqrt{34} \times \frac{54}{\sqrt{34}} = \frac{54}{2} = 27 \text{ (од}^2\text{)}.$$

2. Побудувати лінію. Знайти довжину осей, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис (для еліпса), рівняння асимптот (для гіперболи).

а) $x^2 + 16y^2 - 16 = 0$.

Перетворимо рівняння еліпса до канонічного виду

$$x^2 + 16y^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 16y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1,$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 2a = 2 \times 4 = 8 - \text{велика вісь};$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 2b = 2 \times 1 = 2 - \text{мала вісь}.$$

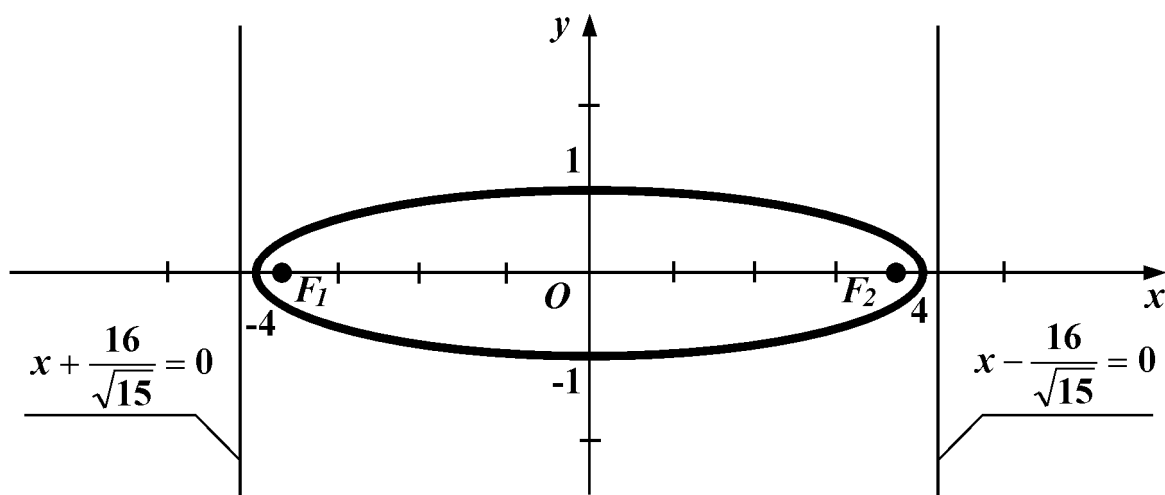
Координати фокусів $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ обчислюють за формулою:

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 16 - 1 = 15 \Rightarrow c = \sqrt{15}. F_1(-c;0), F_2(c;0)$$

Одержали фокуси: $F_1(-\sqrt{15};0)$; $F_2(+\sqrt{15};0)$.

$$\text{Ексцентриситет } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{Рівняння директрис: } x = \pm \frac{a^2}{c} \Rightarrow x = \pm \frac{16}{\sqrt{15}}.$$



б) $x^2 - 16y^2 - 16 = 0$.

Перетворимо рівняння гіперболи до канонічного виду

$$x^2 - 16y^2 - 16 = 0 \text{ } \mathrel{\mathop{\rightarrow}} \text{ } x^2 - 16y^2 = 16 \text{ } \mathrel{\mathop{\rightarrow}} \text{ } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{1} = 1,$$

$a^2 = 16 \text{ } \mathrel{\mathop{\rightarrow}} \text{ } a = 4 \text{ } \mathrel{\mathop{\rightarrow}} \text{ } 2a = 8$ - дійсна вісь;

$b^2 = 1 \text{ } \mathrel{\mathop{\rightarrow}} \text{ } b = 1 \text{ } \mathrel{\mathop{\rightarrow}} \text{ } 2b = 2$ - уявна вісь.

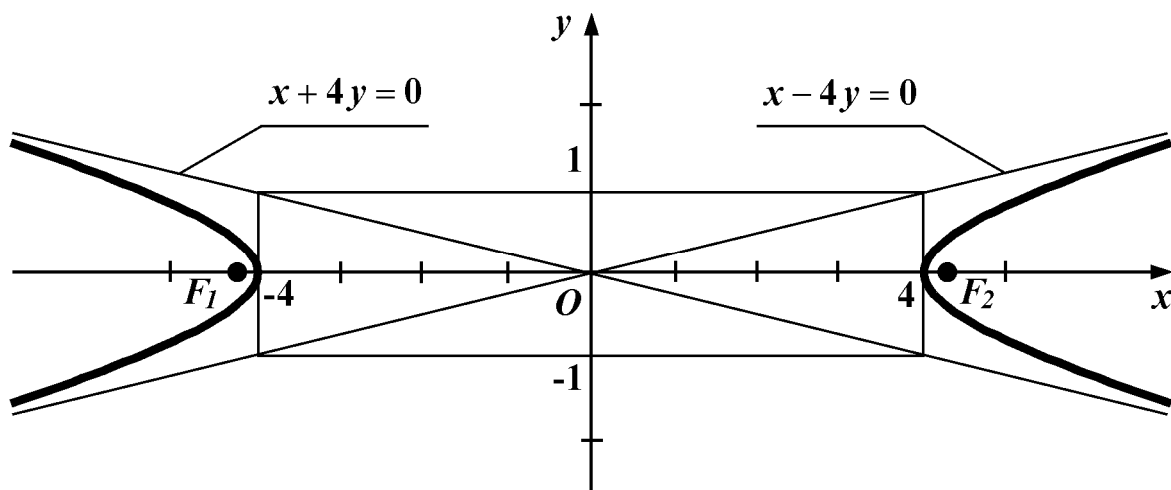
Координати фокусів $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ обчислимо за формулою:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ } \mathrel{\mathop{\rightarrow}} \text{ } c^2 = 16 + 1 = 17 \text{ } \mathrel{\mathop{\rightarrow}} \text{ } c = \sqrt{17}.$$

Одержали фокуси: $F_1(\sqrt{17};0)$; $F_2(-\sqrt{17};0)$.

Ексцентриситет $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.

Рівняння асимптот: $y = \pm \frac{b}{a}x \text{ } \mathrel{\mathop{\rightarrow}} \text{ } y = \pm \frac{1}{4}x$.



3. а) Скласти рівняння еліпса, якщо мала вісь дорівнює **6**, а ексцентриситет

$$e = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Канонічне рівняння еліпса має вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

За умовою мала вісь $2b = 6 \text{ } \mathrel{\mathop{\rightarrow}} \text{ } b = 3$.

Ексцентриситет $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ } \mathrel{\mathop{\rightarrow}} \text{ } c = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$$c^2 = a^2 - b^2 \text{ Р } \frac{a^2}{2} = a^2 - 3^2 \text{ Р } \frac{a^2}{2} = a^2 - 9 \text{ Р } a^2 = 2a^2 - 18 \text{ Р } a^2 = 18.$$

Одержали рівняння еліпса: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$

б) Скласти рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами дорівнює 6 і ексцентриситет $e = \frac{3}{2}$.

Канонічне рівняння гіперболи має вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

За умовою задачі $2c = 6 \text{ Р } c = 3$; ексцентриситет $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \text{ Р } c = \frac{3}{2}a$. Тоді

$$3 = \frac{3}{2}a \text{ Р } a = \frac{3 \times 2}{3} = 2 \text{ Р } a^2 = 4.$$

Для гіперболи $c^2 = a^2 + b^2 \text{ Р } b^2 = c^2 - a^2 \text{ Р } b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5.$

Одержали рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$

4. Знайти координати центра і радіус кола $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

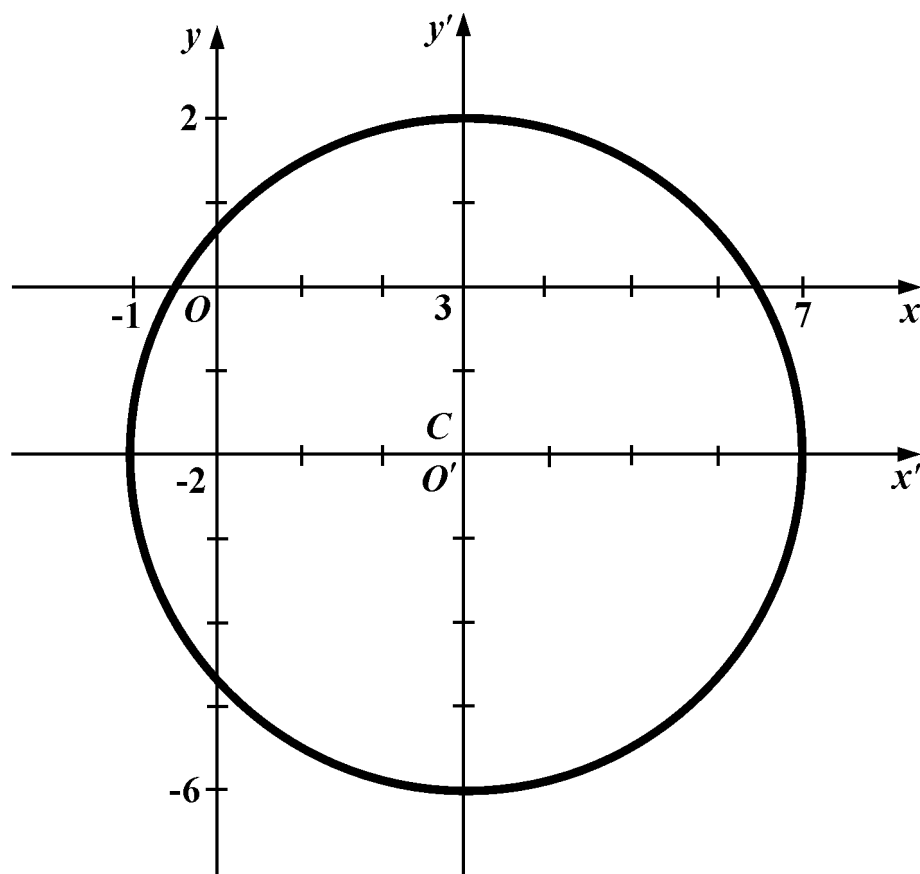
Побудувати коло.

Необхідно привести рівняння кола до канонічного виду: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $C(a; b)$ - центр кола.

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0 \text{ Р } x^2 - 6x + y^2 + 4y - 3 = 0 \text{ Р } x^2 - 2 \times 3 \times x + y^2 + 2 \times 2 \times y - 3 = 0 \text{ Р } (x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2) - 3^2 + (y^2 + 2 \times 2 \times y + 2^2) - 2^2 - 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 3 = 0 \text{ Р } (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Центр кола $C(3; -2)$, радіус $R = 4$



5. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(0;1)$ та від прямої $y - 3 = 0$.

Відстань від точки $F(0;1)$ до точки $M(x; y)$:

$$|FM| = \sqrt{(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2},$$

$$|FM| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2}.$$

Відстань від точки $M(x; y)$ до прямої $y - 3 = 0$: $d = |y - 3|$.

За умовою задачі $|FM| = d$.

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = |y - 3|,$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 - 6y + 9,$$

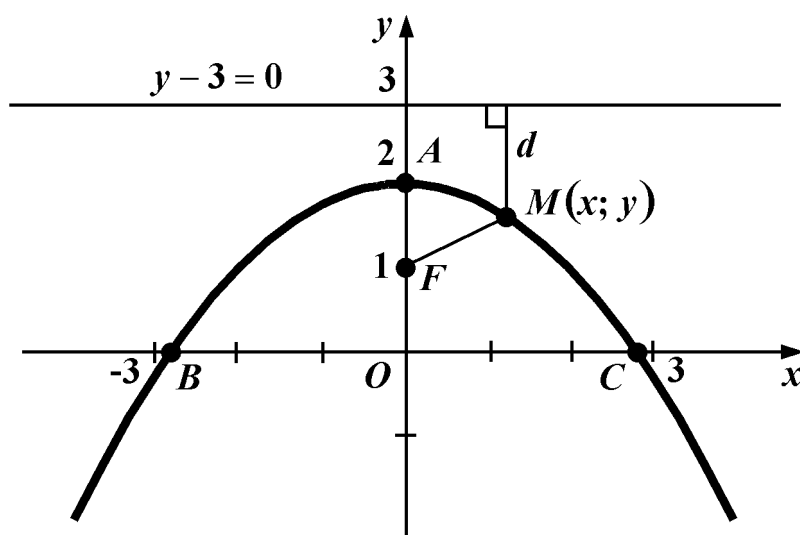
$$x^2 = -4y + 8,$$

$x^2 = -4(y - 2)$ - рівняння параболи.

Точки перетину параболи з вісями координат: $x = 0 \Rightarrow 0 = y - 2 \Rightarrow y = 2$;

$A(0;2)$;

$y = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \times (0 - 2) \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$; $B(-\sqrt{8};0)$, $C(\sqrt{8};0)$.



Тема 4. Аналітична геометрія у просторі.

Література: [1], [10], [11].

Вивчивши цей розділ, студент повинен знати основні рівняння площини та прямої у просторі і успішно застосовувати їх при розв'язку задач.

Приклад. Використовуючи дані прикладу, наведеного у темі 2, знайти:

1. Рівняння грані $A_1A_2A_3$
2. Рівняння ребра A_1A_2
3. Кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$
4. Рівняння та довжину висоти A_4D , яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Розв'язок.

1. Рівняння грані $A_1A_2A_3$ знайдемо як рівняння площини, яка проходить через три точки

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Згідно з нашими даними $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$, маємо:

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 2 & z - 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідки одержуємо:

$$10(x - 4) + 20(y - 2) + 20(z - 5) = 0.$$

Остаточно $x + 2y + 2z - 18 = 0$. Це є загальне рівняння площини грані $A_1A_2A_3$, нормальний вектор якої $\bar{n} = (1;2;2)$.

2. Рівняння ребра одержимо як рівняння прямої, яка проходить через дві точки A_1 і A_2 .

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

$\frac{x - 4}{-4} = \frac{y - 2}{5} = \frac{z - 5}{-3}$ - канонічні рівняння прямої A_1A_2 , направляючий вектор якої $\bar{s} = (-4;5;-3)$.

3. Кут j між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ визначено як кут між вектором $\overline{A_1A_4} = (-3;3;-5)$ і площиною $A_1A_2A_3$, нормальний вектор якої $\bar{n} = (1;2;2)$

$$\sin j = \frac{|\overline{A_1 A_4} \times \overline{n}|}{|\overline{A_1 A_4}| \times |\overline{n}|} = \frac{|-3 + 6 - 10|}{\sqrt{43} \times 3} = \frac{7}{3\sqrt{43}} \approx 0,3558.$$

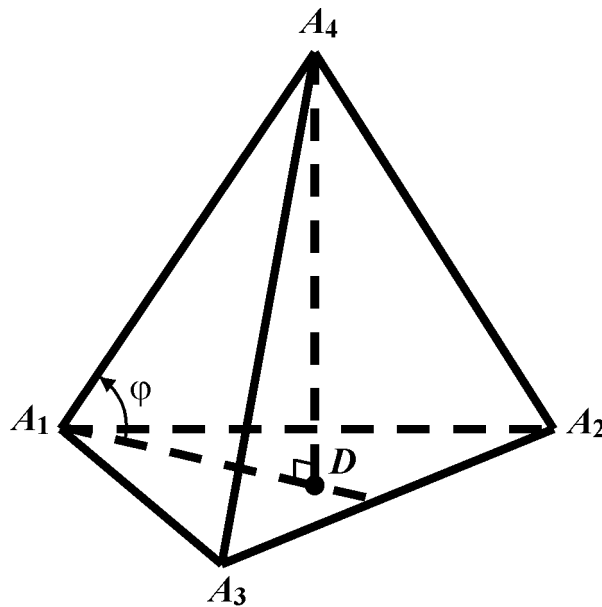
Звідки за таблицями знаходимо $j_2 = \arcsin 0,3558 \approx 0,364$.

4. Рівняння висоти $A_4 D$ визначимо як рівняння прямої, яка проходить через точку $A_4(1;5;0)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = \vec{n} = (1;2;2)$ (за умовою перпендикулярності прямої і площини).

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{2} \text{ - канонічні рівняння висоти } A_4 D.$$

Тепер знайдемо довжину висоти $A_4 D$ як відстань від точки $A_4(1;0;0)$ до площини $A_1 A_2 A_3$ ($x + 2y + 2z - 18 = 0$).

$$|\overline{AD}| = \left| \frac{1 + 2 \times 5 + 0 - 18}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \right| = \frac{7}{3} \approx 2,3333... ..$$



Завдання до контрольної роботи № 1

1. Завдання. Розв'язати систему рівнянь за методом Крамера

$$\begin{array}{l} \text{1.} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{2.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{3.} \quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{4.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{5.} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{6.} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{7.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{8.} \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -7. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{9.} \quad \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{10.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases} \end{array}$$

2. Задача. Задано координати вершини піраміди:

1. $A_1(1;3;6), A_2(2;2;1), A_3(-1;0;1), A_4(-4;6;-3).$
2. $A_1(-4;2;6), A_2(2;-3;0), A_3(-10;5;8), A_4(-5;2;-4).$
3. $A_1(7;2;4), A_2(7;-1;-2), A_3(3;3;1), A_4(-4;2;1).$

4. $A_1(2,1,4), A_2(-1,5,-2), A_3(-7,-3,2), A_4(-6,-3,6)$.
5. $A_1(-1,-5,2), A_2(-6,0,-3), A_3(3,6,-3), A_4(-10,6,7)$.
6. $A_1(0,-1,-1), A_2(-2,3,5), A_3(1,-5,-9), A_4(-1,-6,3)$.
7. $A_1(5,2,0), A_2(2,5,0), A_3(1,2,4), A_4(-1,1,1)$.
8. $A_1(2,-1,-2), A_2(1,2,1), A_3(5,0,-6), A_4(-10,9,-7)$.
9. $A_1(-2,0,-4), A_2(-1,7,1), A_3(4,-8,-4), A_4(1,-4,6)$.
10. $A_1(14,4,5), A_2(-5,-3,2), A_3(-2,-6,-3), A_4(-2,2,-1)$.

- Знайти:
1. Довжину ребра A_1A_2 .
 2. Кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 .
 3. Площу грані $A_1A_2A_3$.
 4. Об'єм піраміди.
 5. Зробити креслення.

3. Задача. Задано координати вершин трикутника ABC.

Знайти:

1. Рівняння сторони BC.
2. Рівняння медіани BK.
3. Довжину медіани BK.
4. Рівняння прямої, що проходить через вершину A паралельно стороні BC.
5. Рівняння висоти AP.
6. Довжину висоти AP.
7. Точку перетину медіани BK та висоти AP.
8. Кут KBC.
9. Площу трикутника ABC.

Зробити рисунок до задачі.

Варіант	$A(x_1; y_1)$	$B(x_2; y_2)$	$C(x_3; y_3)$
1	(-3; -2)	(0; 5)	(-1; 4)
2	(-4; 0)	(-1; 4)	(4; -2)
3	(-6; 1)	(1; 7)	(2; 5)
4	(0; -2)	(3; 3)	(8; 0)
5	(1; 1)	(4; 5)	(7; -1)
6	(-4; -3)	(-1; 5)	(6; -1)
7	(-2; 0)	(0; 6)	(8; -2)
8	(-5; 2)	(1; 8)	(5; -2)
9	(0; 1)	(3; 4)	(8; -1)
10	(-3; 2)	(1; 8)	(5; 4)

4. Задача. Побудувати лінію. Знайти довжини осей, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис (для еліпса), рівняння асимптот (для гіперболи).

Варіант	Рівняння лінії	Варіант	Рівняння лінії
1	$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$	6	$16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$
2	$4x^2 - 25y^2 - 100 = 0$	7	$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$
3	$9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$	8	$9x^2 - y^2 - 9 = 0$
4	$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$	9	$4x^2 + 9y^2 - 9 = 0$
5	$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$	10	$x^2 - 4y^2 - 4 = 0$

5. Задача.

1. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами $2c = 10$ і уявна вісь дорівнює 8. Побудувати гіперболу.

2. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$. Побудувати еліпс.

3. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{2}$. Побудувати гіперболу.

4. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$. Побудувати еліпс.

5. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$. Побудувати гіперболу.

6. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{5}$. Побудувати еліпс.

7. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо дійсна вісь дорівнює 18, а ексцентриситет $e = \frac{5}{3}$. Побудувати гіперболу.

8. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $e = \frac{3}{5}$. Побудувати лінію.

9. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якій належить точка $M(\frac{9}{2}; -1)$ і рівняння асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$. Побудувати гіперболу.

10. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $e = \frac{12}{13}$. Побудувати еліпс.

6. Задача. Знайти координати центра і радіус кола. Побудувати коло.

Варіант	Рівняння кола	Варіант	Рівняння кола
1	$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$	6	$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$
2	$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$	7	$x^2 + y^2 + 6x = 0$
3	$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$	8	$x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0$
4	$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$	9	$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$
5	$x^2 + y^2 - 4x = 0$	10	$x^2 + y^2 + 2y = 0$

7. Задача. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(x_1; y_1)$ та від прямої $Ax + Bx + C = 0$. Знайти точки перетину цієї кривої з вісями координат і побудувати її.

Варіант	$F(x_1; y_1)$	$Ax + Bx + C = 0$
1	(3; 1)	$x + 2 = 0$
2	(1; -2)	$y + 3 = 0$
3	(-1; 1)	$x - 4 = 0$
4	(3; -2)	$y + 1 = 0$
5	(2; -1)	$x + 5 = 0$
6	(0; 2)	$y + -4 = 0$
7	(0; 0)	$x + 4 = 0$
8	(3; -4)	$y - 1 = 0$
9	(1; 0)	$x - 3 = 0$
10	(-2; -1)	$y + 2 = 0$

8. Задача. Використовуючи дані задачі 2, знайти:

1. Рівняння грані $A_1A_2A_3$.
2. Рівняння ребра A_1A_2 .
3. Кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.
4. Рівняння та довжину висоти A_4D , яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2

Тема 1. Теорія границь

Література: [3], розд. 2, § 1 – 8; [4], глава I, § 3,4; [8], глава VI, § 4,5; [9], глава 5, § 1,2.

При вивченні поняття границі функції $y = f(x)$ в точці $x = a$ студент повинен пам'ятати про те, що функція в точці $x = a$ може бути невизначеною, а границя її в точці $x = a$ визначається значеннями функції в колі точки $x = a$ без самої точки $x = a$.

Обчислення границь функцій, як правило, зводиться до розкриття невизначеностей. Ми говоримо, що маємо невизначеність, якщо при безпосередній підстановці граничного значення аргументу у вираз функції, що стоїть під знаком границі, не можна дійти висновку про наявність або відсутність границі вказаної функції. В залежності від виду невизначеності записують у вигляді:

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\{ \infty - \infty \}$, $\{ 0 \cdot \infty \}$, $\{ 1^\infty \}$ та ін.

Розглянемо розв'язання деяких типових прикладів на обчислення границь функцій.

Приклад 1. Знайти

а) $\lim_{x \rightarrow 5} (5x^3 - 7x^2 + x - 2)$;

б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^3 - 100x^2 + 1}{100x^2 + 15x - 4}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1000x^3 + 3x^2 - 2}{0,001x^4 - 100x^3 + 1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^3 - 3x^2 + 5}{3x^3 - 7x^2 + 2}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt[4]{x^2 - 7x}}$; є) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right)$.

Розв'язання. а) Винесемо за дужки x у старшому степені

$$\lim_{x \rightarrow 5} (5x^3 - 7x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow 5} x^3 \left(5 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = 5.$$

Ми скористалися тим, що $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$ (границя не існує, функція $y = x^3$ при $x \rightarrow \infty$ є нескінченно великою); при діленні числа на величину нескінченно велику одержуємо величину нескінченно малу $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} = 0$. Таким чином, границя многочлена при $x \rightarrow \infty$ визначається границею члена зі старшим степенем.

б) Поділимо чисельник і знаменник на x у старшому степені. Одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 - 100x^2 + 1}{100x^2 + 15x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{100}{x} + \frac{1}{x^3}}{\frac{100}{x} + \frac{15}{x^2} - \frac{4}{x^3}} = -\infty.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x^3 + 3x^2 - 2}{0,001x^4 - 100x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^4}}{0,001 - \frac{100}{x} + \frac{1}{x^4}} = 0.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + 5}{3x^3 - 7x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^3}} = \frac{4}{3}.$$

Висновок: границя відношення двох многочленів при $x \rightarrow \infty$ не існує, якщо степінь чисельника вище степеня знаменника, що умовно позначається символом ∞ ; дорівнює 0 , якщо степінь знаменника вище степеня чисельника; дорівнює відношенню коефіцієнтів при x у старших степенях, якщо степені чисельника і знаменника однакові.

е) Границю відношення ірраціональних виразів знаходимо аналогічно. Старші степені x у першому та другому доданках чисельника відповідно дорівнюють $\frac{2}{3}$ і $\frac{1}{2}$. Старший степінь x у знаменнику $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Отже, старший степінь змінної x для всього дробу $-\frac{2}{3}$. Поділимо чисельник і знаменник на $x^{2/3}$. Одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt[4]{x^2 - 7x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2} + 3\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x}{x^{4/3}} + \frac{1}{x^{4/3}}}}{\sqrt[4]{\frac{x^2}{x^{8/3}} - 7\frac{x}{x^{8/3}}}} = \infty$$

Ми скористалися тим, що $(x^{2/3})^3 = x^2$, $(x^{2/3})^2 = x^{4/3}$, $(x^{2/3})^4 = x^{8/3}$.

є) Маємо невизначеність виду $\{\infty - \infty\}$. Помножимо та поділимо дану функцію на спряжений вираз і скористаємося формулою $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Одержимо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right) &= \{\infty - \infty\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 1 - x^2 + 7x - 3}{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 4}{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = -\frac{5}{1+1} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Спряжені вирази:

$$\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \right) \ll \left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b} \right); \left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} \right) \ll \left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2} \right).$$

Приклад 2. Знайти

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Розв'язання. Безпосередня підстановка $x = 1$ в задану функцію приводить до невизначеності виду $\frac{0}{0}$. Для її розкриття розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо дріб на $(x - 1)$ – критичний множник. Щоб виділити множник $(x - 1)$ у чисельнику, виконуємо ділення чисельника на вираз $(x - 1)$

$$\begin{array}{r}
 x^3+0x^2+x-2 \bigg| x-1 \\
 \underline{x^3-x^2} \\
 x^2+x \\
 \underline{x^2-x} \\
 2x-2 \\
 \underline{2x-2} \\
 0
 \end{array}
 .$$

Знаменник можна розкласти на множники відомим способом групування членів

$$\begin{aligned}
 x^3 - x^2 - x + 1 &= (x^3 - x^2) - (x - 1) = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 1) = \\
 &= (x - 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2(x + 1).
 \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2)}{(x - 1)^2(x + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x + 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \infty.
 \end{aligned}$$

Ми скористалися тим, що при діленні числа на величину нескінченно малу одержуємо величину нескінченно велику $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x - 1)} = \infty$.

Приклад 3. Знайти

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x^2}.$$

Розв'язання. а) Після підстановки значення змінної $x = 0$ в задану функцію одержуємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений чисельнику, і на вираз, спряжений знаменнику. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)}{(\sqrt{x^2 + 16} - 4)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1 - 1)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)}{(x^2 + 16 - 16)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 16} + 4)}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2} - 1\right) \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1}{x^2 \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2 - 1}{x^2 \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{3} \sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} =$$

$$= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.$$

Ми скористалися формулою $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.

Приклад 4. Знайти

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{x^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2} \operatorname{tg} \frac{px}{2a}}{x-a}.$$

Розв'язання. а) Безпосередня підстановка $x = 0$ в заданий вираз приводить до невизначеності виду $\frac{0}{0}$. Скориставшись тим, що

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}, \quad 1 - \cos 3x = 2 \sin^2 \frac{3x}{2},$$

зведемо дріб до вигляду, зручного для застосування першої важливої границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \sin 3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x (1 - \cos 3x)}{x^3 \cos 3x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 3x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} = \\
&= 3 \times 1 \times 1 \times 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} = 3 \times \frac{9}{2} \times 1 = \frac{27}{2}.
\end{aligned}$$

б) Щоб скористатися першою важливою границею покладемо $x - a = y$. Тоді $x = y + a$, при $x \rightarrow a$ $y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p(x-a)}{2a}}{\frac{x-a}{2}} = \{0 \times \infty\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{p y}{2a}}{\frac{y}{2}} + \frac{p y}{2a} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \operatorname{ctg} \frac{p y}{2a} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p y}{2a}} = \frac{1}{1} \frac{0}{0} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2} \times \frac{p y}{2a}}{\operatorname{tg} \frac{p y}{2a} \times \frac{p y}{2a}} = \\
&= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{p y}{2a}}{\operatorname{tg} \frac{p y}{2a}} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{p}{a}} = -1 \times 1 \times \frac{a}{p} = - \frac{a}{p}.
\end{aligned}$$

Ми скористалися також формулою $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$, що є наслідком першої важливої границі.

Приклад 5. Знайти

$$\begin{aligned}
\text{а) } &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-2}^{2x-1}; & \text{б) } &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}.
\end{aligned}$$

Розв'язання. а) Скористаємося другою важливою границею

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{a \rightarrow 0} (1+a)^{1/a} = e = 2,71828...$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} e^{2x-1} &= \left\{ 1^\infty \right\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} e^{2x-1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} e^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} e^{2x-1} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(2x-1)}{x-2}} = e^6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+5x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+5x)^{1/x} = \\
&= \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{(1/5x) \cdot 5} = \ln e^5 = 5.
\end{aligned}$$

Тема 2. Неперервні функції та їх властивості

Література: [3], розд. 2, § 9-10.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_0$, якщо границя функції при $x \rightarrow x_0$ дорівнює значенню функції в точці $x = x_0$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Задача 1. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x+2}}$ в точці $x = -2$.

Розв'язання. При $x \rightarrow -2$ функція $\frac{1}{x+2}$ неперервна, отже, неперервна

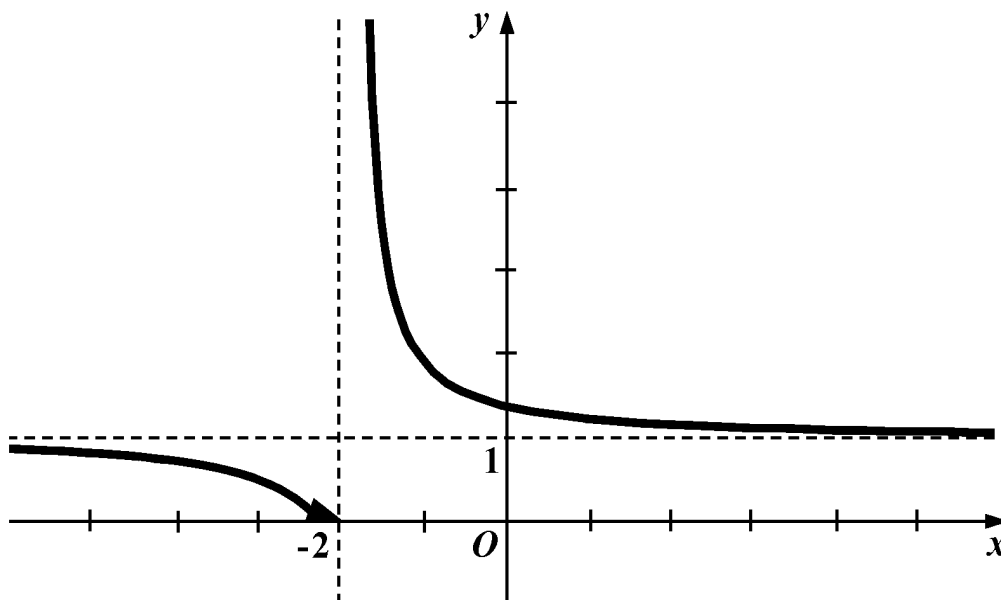
і функція $y = 2^{\frac{1}{x+2}}$. При $x = -2$ функція $\frac{1}{x+2}$ невизначена. При $x \rightarrow -2$

праворуч, тобто при $x \rightarrow -2 + 0$, функція $\frac{1}{x+2}$ прямує до $+\infty$, отже і сама

функція $y = 2^{\frac{1}{x+2}}$ також при цьому прямуватиме до $+\infty$. Аналогічно попередньому дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} 2^{\frac{1}{x+2}} = 0.$$

Отже, функція $y = 2^{\frac{1}{x+2}}$ має в точці $x = -2$ правосторонню границю $+\infty$ і лівосторонню 0 , тобто в точці $x = -2$ ця функція має точку розриву другого роду (точки, в яких хоча б одна з границь лівостороння або правостороння не існує взагалі, називають точками розриву другого роду).



Задача 2. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } x < 2 \\ x + 1 & \text{при } x \geq 2 \end{cases}.$$

Розв'язання. Для всіх $x \neq 2$ функція неперервна. Знаходимо лівосторонню і правосторонню границі функції $f(x)$ в точці $x = 2$.

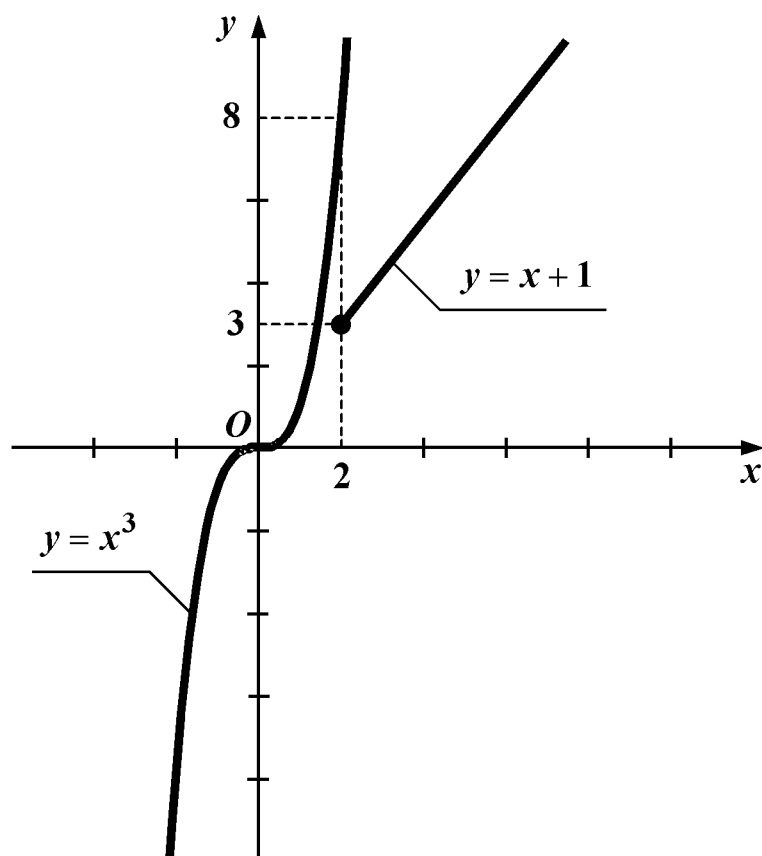
$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} x^3 = 8.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x + 1) = 3.$$

Отже, $x = 2$ є точкою розриву першого роду функції $f(x)$.

Число, що дорівнює $\left| \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \right|$, називається стрибком функції у точці $x = x_0$, де x_0 – точка розриву першого роду. У нашому прикладі стрибок дорівнює $|3 - 8| = 5$.

Схематичний графік функції $f(x)$ має вигляд:



Тема 3. Похідна. Диференціювання функцій

Література: [3], розд. III, § 5-19.

При знаходженні похідних за формулами головну роль грає правило диференціювання складних функцій.

Розглянемо кілька прикладів на знаходження похідних.

Приклад 1. Знайти похідну функції

$$y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Розв'язок. Перепишемо функцію у вигляді

$$y = (1-x)^{\frac{2}{3}} + (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Для знаходження похідної скористаємося формулами:

$$(u+v)^{\zeta} = u^{\zeta} + v^{\zeta}; \quad (u^n)^{\zeta} = n u^{n-1} u^{\zeta}.$$

$$y^{\zeta} = \frac{2}{3} (1-x)^{-\frac{1}{3}} (-1) + \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \times 2x = \frac{2}{3 \sqrt[3]{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})$.

Розв'язок. Використаємо формули:

$$(\ln u)^{\zeta} = \frac{1}{u} u^{\zeta}, \quad (\sqrt{u})^{\zeta} = \frac{1}{2\sqrt{u}} u^{\zeta}.$$

$$\begin{aligned} y^{\zeta} &= \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \frac{2x}{1} + \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 1}} \times 4x^3 \frac{1}{2} = \frac{2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \frac{1}{1} + \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} \frac{1}{1} = \\ &= \frac{2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \times \frac{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = e^{-x^2} \cos^3(2x + 3)$.

Розв'язок. Для знаходження похідної скористаємося формулами:

$$(uv)^{\zeta} = u^{\zeta} v + uv^{\zeta}; \quad (e^u)^{\zeta} = e^u u^{\zeta}; \quad (u^3)^{\zeta} = 3u^2 u^{\zeta}; \quad (\cos u)^{\zeta} = -\sin u \times u^{\zeta}.$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx} e^{-x^2} \cos^3(2x+3) = e^{-x^2} \frac{d}{dx} \cos^3(2x+3) = \\
&= e^{-x^2} (-2x) \cos^3(2x+3) + e^{-x^2} 3 \cos^2(2x+3) \times (-\sin(2x+3)) \times 2 = \\
&= -2x e^{-x^2} \cos^3(2x+3) - 6 e^{-x^2} \cos^2(2x+3) \sin(2x+3) = \\
&= -2 e^{-x^2} \cos^2(2x+3) (x \cos(2x+3) + 3 \sin(2x+3)).
\end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти похідну y' функції $y \ln x - x \ln y = \cos(xy)$.

Розв'язок. Функція задана неявно. Диференціюємо рівняння за змінною x , враховуючи, що y є функцією від x , а її похідна дорівнює y' .

$$y' \ln x + y \times \frac{1}{x} - \left(1 \times \ln y + x \times \frac{1}{y} \times y' \right) = -\sin(xy) \times (1 \times y + x \times y'),$$

$$y' \ln x + \frac{y}{x} - \ln y + \frac{x}{y} \times y' = -y \times \sin(xy) - xy' \times \sin(xy),$$

$$y' \ln x + \frac{x}{y} \times y' + xy' \times \sin(xy) = -\frac{y}{x} + \ln y - y \times \sin(xy),$$

$$y' \left(\ln x + \frac{x}{y} + x \times \sin(xy) \right) = -\frac{y}{x} + \ln y - \sin(xy) \times y,$$

$$y' = \frac{-\frac{y}{x} + \ln y - \sin(xy) \times y}{\ln x + \frac{x}{y} + x \times \sin(xy)}.$$

Приклад 5. Знайти похідну y' функції $y = (\sin x)^{\lg x}$.

Розв'язок. Прологарифмуємо задану функцію, а потім продиференціюємо отриману неявну функцію $\ln y = \lg x \times \ln(\sin x)$;

$$\frac{1}{y} \times y' = (\lg x)' \times \ln(\sin x) + \lg x \times (\ln(\sin x))';$$

$$\frac{1}{y} \times y' = - \frac{1}{\sin^2 x} \times \ln(\sin x) + \operatorname{tg} x \times \frac{1}{\sin x} \times \cos x ;$$

$$\frac{1}{y} \times y' = - \sin^{-2} x \times \ln(\sin x) + 1 ;$$

$$y' = \left(- \sin^{-2} x \times \ln(\sin x) + 1 \right) \times (\sin x)^{\operatorname{tg} x} ;$$

$$y' = - (\sin x)^{\operatorname{tg} x - 2} \times \ln(\sin x) + (\sin x)^{\operatorname{tg} x} .$$

Приклад 6. Знайти похідну y' функції $y = \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}$.

Розв'язок. Прологарифмуємо задану функцію, а потім продиференціюємо отриману неявну функцію

$$\ln y = \ln \sqrt{1 - \arcsin x} - \ln \left(\sqrt{1 + \arcsin x} \right) ;$$

$$\frac{1}{y} \times y' = \left(\ln \sqrt{1 - \arcsin x} \right)' - \left(\ln \sqrt{1 + \arcsin x} \right)';$$

$$\frac{1}{y} \times y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \arcsin x}} \times \frac{1}{2\sqrt{1 - \arcsin x}} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \arcsin x}} \times \frac{1}{2\sqrt{1 + \arcsin x}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} ;$$

$$\frac{1}{y} \times y' = - \frac{1}{2(1 - \arcsin x) \sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{2(1 + \arcsin x) \sqrt{1 - x^2}} ;$$

$$\frac{1}{y} \times y' = - \frac{1}{(1 - \arcsin^2 x) \sqrt{1 - x^2}} ;$$

$$y' = - \frac{1}{(1 - \arcsin^2 x) \sqrt{1 - x^2}} \times \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}} .$$

Приклад 7. Знайти похідну y' від функції $y = x \times e^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язок. Знаходимо y' :

$$y' = 1 \times e^{\frac{1}{x}} + x \times e^{\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Знаходимо y'' :

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}.$$

Тоді $y''(1) = e$.

Приклад 8. Знайти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ при $x_0 = \frac{p}{8}$ для функції

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 2t; \\ y = \sin^3 2t. \end{cases}$$

Розв'язок. Функція задана параметрично. Використаємо формули:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}.$$

$$\frac{dx}{dt} = -12 \cos^2 2t \sin 2t; \quad \frac{dy}{dt} = 12 \sin^2 2t \cos 2t.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12 \sin^2 2t \cos 2t}{-12 \cos^2 2t \sin 2t} = -\operatorname{tg} 2t; \quad \frac{dy\left(\frac{p}{8}\right)}{dx} = -1.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\cos^2 2t}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{6 \cos^4 2t \sin 2t}; \quad \frac{d^2 y\left(\frac{p}{8}\right)}{dx^2} = \frac{1}{6}.$$

Завдання до контрольної роботи № 2

1. Завдання. Знайти границі функцій, не користуючись правилами Лопітала.

1. 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{28x^2 - 5x + 1}{7 + 3x - x^3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2\operatorname{tg} x)^{3\operatorname{ctg} x}$.

2. 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x + 2} - \sqrt[3]{8x^3 + 5}}{\sqrt[4]{x + 7} - x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{2/x}$.

3. 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x} - x^{\frac{1}{2}}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{\sqrt{3x} - 3}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 3}{6x - 4}^{2x}$.

4. 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{0,005x^3 - 8x + 5}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^3 - (1 + 3x)}{x + x^5}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow p+0} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{2x + 6}^x$.

$$5. \quad 1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x^3 - 2}}{\sqrt[3]{8x^6 + 3x} - x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3x - 4} - \sqrt[3]{3x + 2}}{x^{\frac{x+1}{3}}}.$$

$$6. \quad 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} - \frac{1}{2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(1 - 2x)}{(4x^2 - 1)}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x}.$$

$$7. \quad 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120x^2 - 1}{3x^3 - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2};$$

$$3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx}.$$

$$8. \quad 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2} - 5x^2}{x - \sqrt{x^4 - x - 1}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{p}{2}}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[3]{x}}{x}.$$

9. 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 - ax})$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln x - \ln(x+2)]$.

10. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-5)^3}{(7+9x)^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+2x)}$.

2. Задача. Дослідити функцію на неперервність у заданій точці. Знайти границі ліворуч і праворуч від заданої точки. За наявності точки розриву встановити її рід.

1) $y = 5^{\frac{1}{x-1}}$, $(x = 1)$. 2) $y = e^{\frac{1}{x+2}}$, $(x = -2)$.

3) $y = 4^{\frac{1}{3-x}}$, $(x = 3)$. 4) $y = 9^{\frac{1}{2-x}}$, $(x = 2)$.

5) $y = 12^{\frac{1}{x}}$, $(x = 0)$. 6) $y = 8^{\frac{1}{5-x}}$, $(x = 5)$.

7) $y = 10^{\frac{1}{7-x}}$, $(x = 7)$. 8) $y = 14^{\frac{1}{6-x}}$, $(x = 6)$.

9) $y = 15^{\frac{1}{8-x}}$, $(x = 8)$. 10) $y = 11^{\frac{1}{4+x}}$, $(x = -1)$.

3. Задача. Функцію задано різними аналітичними виразами для різних областей зміни незалежної змінної. Треба: 1) знайти точки розриву функції, якщо вони існують; 2) у точках розриву першого роду, знайти стрибок функції; 3) зробити схематичний графік.

$$1) \quad y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 1, \\ x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$2) \quad y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ 3x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$3) \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 2, \\ x^3 + 2, & x > 2. \end{cases}$$

$$4) \quad y = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & \text{якщо } x < 3, \\ x^2, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$5) \quad y = \begin{cases} x + 2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ 1 - x^2, & x > 1. \end{cases}$$

$$6) \quad y = \begin{cases} 1 - x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 1 - x + 3, & x > 1. \end{cases}$$

$$7) \quad y = \begin{cases} 1 - x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 1 - x + 3, & x > 2. \end{cases}$$

$$8) \quad y = \begin{cases} 1 - x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$9) \quad y = \begin{cases} x + 4, & \text{якщо } x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$10) \quad y = \begin{cases} 1 - x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x + 1, & x > 2. \end{cases}$$

4. Задача . Знайти похідні y' даних функцій.

$$1. \quad \text{а) } y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}} + 3x\sqrt{4 - x}; \quad \text{б) } y = x^3 \arctg^2(5x^2);$$

$$\text{B)} \ y = e^{-2x} + e^{2x}; \quad \Gamma) \ xy = \sin y \times e^{\cos x}; \quad \text{Д)} \ y = x^{2x}.$$

$$2. \quad \text{a)} \ y = \frac{2(x^3 + 2x - 1)}{\sqrt[4]{3 - 2x}}; \quad \text{б)} \ y = \arcsin^4(4x^3 - 7x);$$

$$\text{B)} \ y = \cos(2x)(x^3 - 1); \quad \Gamma) \ \sin y \times \cos x = 3^{x-y}; \quad \text{Д)} \ y = (\ln x)^x.$$

$$3. \quad \text{a)} \ y = 3\sqrt{\frac{x-1}{3x^2+7x}}; \quad \text{б)} \ y = (3 + \cos(3x))^3; \quad \text{B)} \ y = \frac{x}{\sin x};$$

$$\Gamma) \ \operatorname{arctg} y = x \arcsin \frac{y}{x}; \quad \text{Д)} \ y = (\cos x)^{\sin x}.$$

$$4. \quad \text{a)} \ y = (7 - x^2)\sqrt{x^2 + 3} - \frac{2}{\sqrt{x+3}}; \quad \text{б)} \ y = \lg^2(3x^2);$$

$$\text{B)} \ y = \cos(2x) \operatorname{arctg} x; \quad \Gamma) \ \sin(2xy) = x \cos(2y) - \sqrt{y}; \quad \text{Д)} \ y = \frac{1+x}{x}.$$

$$5. \quad \text{a)} \ y = \frac{x+1}{\sqrt{x^3-2x}}; \quad \text{б)} \ y = \ln^3(x - 2x^2); \quad \text{B)} \ y = \frac{\cos(2x)}{x^3-1};$$

$$\Gamma) \ e^{-xy} = \cos(\arcsin(y-x)); \quad \text{Д)} \ y = x^{\sin x}.$$

$$6. \quad \text{a)} \ y = \sqrt[3]{x^2+4} - \frac{3}{\sqrt{2x-x^2}}; \quad \text{б)} \ y = \operatorname{arctg}^3(2x); \quad \text{B)} \ y = \frac{x}{\sin^2 x};$$

$$\Gamma) x^3 + y^3 - xy = 7; \quad \Delta) y = 3 \sqrt{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)}}.$$

$$7. \quad \text{a) } y = (x - 1)^3 \sqrt{3x^2 - 2} + \frac{1}{\sqrt{3 - 2x}} \quad \text{б) } y = \cos \frac{2}{x^3}; \quad \text{в) } y = \sin x \cos^2 x;$$

$$\Gamma) \ln(x - y) = \frac{y}{x}; \quad \Delta) y = \sqrt[x]{(x + 1)^2}.$$

$$8. \quad \text{a) } y = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3}}{2(x^2 + x)} + 5; \quad \text{б) } y = (2 - \sin 3x)^5; \quad \text{в) } y = \ln(3x) \ln^3 x;$$

$$\Gamma) x^2 y = e^{3x - 2y}; \quad \Delta) y = x^{\operatorname{tg} x}.$$

$$9. \quad \text{a) } y = \frac{\sqrt[3]{1 - x - 3x^2 + 4}}{\sqrt{2x - 7}}; \quad \text{б) } y = x \ln^2(1 - 2x); \quad \text{в) } y = \frac{1}{e^{3x} \operatorname{tg} x};$$

$$\Gamma) e^x \sin y - e^y \cos x = 0; \quad \Delta) y = (x^2 + 1)^{\sin x}.$$

$$10. \quad \text{a) } y = \sqrt[4]{x^2 + 2x} - \frac{x}{\sqrt{x + 1}}; \quad \text{б) } y = \arcsin^3(2x); \quad \text{в) } y = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x};$$

$$\Gamma) \ln_{\frac{y}{x}} \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \operatorname{ctg}(xy); \quad \Delta) y = x^{\frac{1}{x}}.$$

**Програма дисципліни “ВИЩА МАТЕМАТИКА”
(2 семестр)**

**I. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ (РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ТА
НОРМАЛІ). ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ**

1. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції.
2. Умови зростання та спадання функцій. Точки екстремуму. Необхідна та достатня умови існування екстремуму. Знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної на відрізку функції.
3. Дослідження функцій на опуклість та вгнутість. Точка перегину. Асимптоти кривих. Загальна схема побудови графіків функцій.

II. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

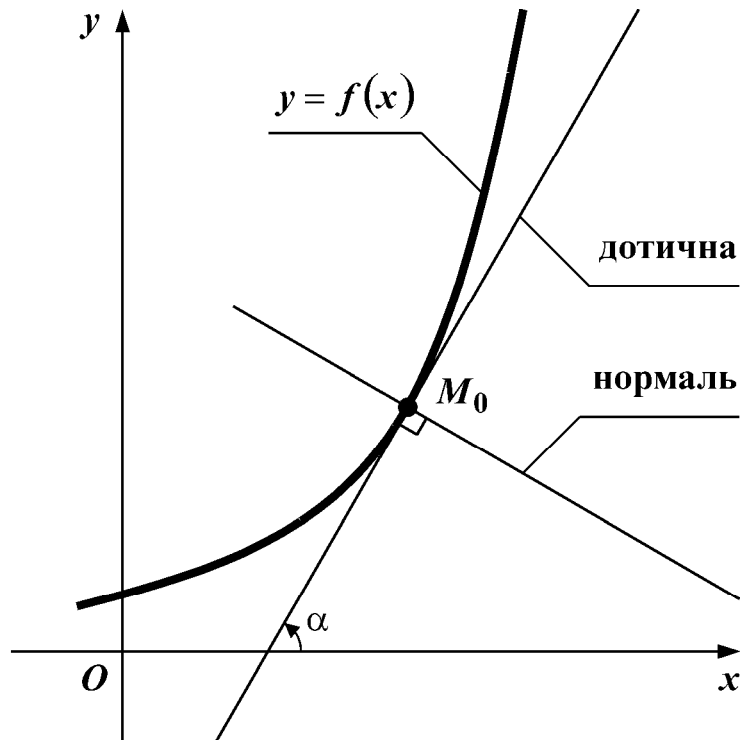
1. Функції кількох змінних. Область визначення. Границя функції. Неперервність.
2. Часткові похідні. Повний диференціал і його зв'язок із частковими похідними. Дотична площина і нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала.
3. Часткові похідні і повні диференціали вищих порядків.
4. Неявні функції. Диференціювання неявних функцій.
5. Екстремум функції двох змінних. Необхідна та достатня умови існування екстремуму.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Підручник в 2-х томах, т. I – М.: Интеграл – Прес, 2002. – 416 с.
2. Вища математика. Збірник задач / За редакцією В.П.Дубовика, І.І. Юрика. – Київ: Видавництво “А.С.К.”, 2003. – 480 с.
3. Вища математика. Збірник задач під редакцією П.П.Овчиннікова.– Київ: Техніка, 2003.– 375 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.– Київ, “А.С.К.”, 2005.– 648 с.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

1. ДОТИЧНА І НОРМАЛЬ



$y - y_0 = k(x - x_0)$ - рівняння прямої через т. $M_0(x_0; y_0)$;

$k = \operatorname{tg} \alpha = y'(M_0)$ - геометричний зміст похідної;

$y - y_0 = y'(M_0)(x - x_0)$ - рівняння дотичної;

$k_1 \times k_2 = -1$ - умова перпендикулярності прямих;

$y - y_0 = -\frac{1}{y'(M_0)}(x - x_0)$ - рівняння нормалі.

Дотична і нормаль до даної лінії в заданій точці – це є прямі, що проходить через точку дотику $M_0(x_0; y_0)$.

Геометричний зміст похідної в даній точці $M_0(x_0; y_0)$: значення похідної в даній точці $y'(M_0)$ є тангенс кута α , під яким дотичне до кривої в точці M_0 перетинає вісь OX . Нормаль перпендикулярна до дотичної в точці дотику M_0 . Тому слід використати умову перпендикулярності двох прямих: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

2. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ

Для дослідження функції і побудови її графіка студент повинен добре знати, що при зростанні функції - $y' > 0$, при спаданні - $y' < 0$ і розуміти різницю між необхідною та достатньою умовами існування екстремума функції а також необхідною і достатньою умовами існування точок перетину.

$y'(x_0) = 0$ або не існує – необхідна умова існування екстремуму;

$y''(x_0) = 0$ або не існує – необхідна умова існування точок перетину.

Із цих умов знаходяться критичні точки.

Достатня умова для існування екстремуму в т. M_0 або точки перегину – зміна знака відповідно першої і другої похідної при переході через критичну точку.

$y' > 0$ – функція зростає ↗ ;

$y' < 0$ – функція спадає ↘ ;

$y'' > 0$ – функція вгнута $\overset{+}{\curvearrowright}$;

$y'' < 0$ – функція опукла $\overset{-}{\curvearrowright}$.

Диференціювання складних функцій

<p>1. $z = f(U, V)$, де $\begin{cases} U = U(x, y) \\ V = V(x, y) \end{cases}$,</p> $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x},$ $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y}.$
<p>2. $z = f(U, V)$, де $\begin{cases} U = U(x) \\ V = V(x) \end{cases}$,</p> $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x}.$
<p>3. $z = f(x, y)$, де $y = f(x)$,</p> $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial x}.$
<p>4. $z = f(x, y)$,</p> $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \times dx + \frac{\partial z}{\partial y} \times dy.$
<p>5. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, у точках неперервності.</p>

Зауваження: слід чітко розуміти, що $\frac{dz}{dx}$ і $\frac{\partial z}{\partial x}$ є відповідно повна і часткова похідні.

Для наближеного обчислення значення функції в точці $M_0(x_1, y_1)$ слід користуватися формулою:

$$f(x_0 + Dx, y_0 + Dy) \approx f(x_0, y_0) + d f(x, y) \Big|_{M_0}$$

Якщо функція задається неявно:

$$1. \quad F(x, y, z) = 0, \text{ де } z = z(x, y), \text{ то } z'_x = \frac{F_z}{F_x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad z'_y = \frac{F_z}{F_y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

$$2. \quad F(x, y) = 0, \quad y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$F'_x|_{M_0} \times (x - x_0) + F'_y|_{M_0} \times (y - y_0) + F'_z|_{M_0} \times (z - z_0) = 0$ - рівняння дотичної площини;

$$\frac{x - x_0}{F'_x|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{F'_y|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{F'_z|_{M_0}} \text{ - рівняння нормалі.}$$

ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

$$1. \text{ а) } \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

$$\text{б) } d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

$$\text{в) } \int df(x) = f(x) + C.$$

$$2. \text{ а) } \int A f(x) dx = A \int f(x) dx, \quad A = \text{const}.$$

$$\text{б) } \int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

$$\text{в) } \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \text{ якщо } \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Таблиця похідних

- | | |
|--|---|
| 1. $C' = 0$; | 8. $(\cos x)' = -\sin x$; |
| 2. $(x^a)' = ax^{a-1}$; | 9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; |
| 3. $(a^x)' = a^x \ln a$; | 10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; |
| 4. $(e^x)' = e^x$; | 11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; |
| 5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; | 12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; |
| 6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; | 13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$; |
| 7. $(\sin x)' = \cos x$; | 14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ |

Таблиця невизначених інтегралів

- | | |
|---|---|
| 1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$; | 8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$; |
| 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$; | 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; |
| 3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; | 10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$; |
| 4. $\int e^x dx = e^x + C$; | 11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} x \frac{x}{a} + C$; |
| 5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; | 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm k} + C$; |
| 6. $\int \cos x dx = \sin x + C$; | 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$; |
| 7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$; | 14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$. |

Інтегрування способом підстановки

$$\int f(j(t)) j'(t) dt = \int f(x) dx \quad \left| \begin{array}{l} j(t) = x \\ dj(t) = dx \\ j'(t) dt = dx \end{array} \right|$$

Інтегрування способом за частинами

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Формула Ньютона-Лейбниця для обчислення визначених інтегралів

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Спосіб підстановки у визначених інтегралах

$$\int_a^b f(j(t)) j'(t) dt = \int_{j(a)}^{j(b)} f(x) dx \quad \left| \begin{array}{l} j(t) = x; \quad \text{при } t = b \quad x = j(b) = b \\ j'(t) dt = dx; \quad \text{при } t = a \quad x = j(a) = a \end{array} \right|$$

Спосіб інтегрування за частинами у визначених інтегралах

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Формула Сімпсона для наближеного обчислення визначених інтегралів

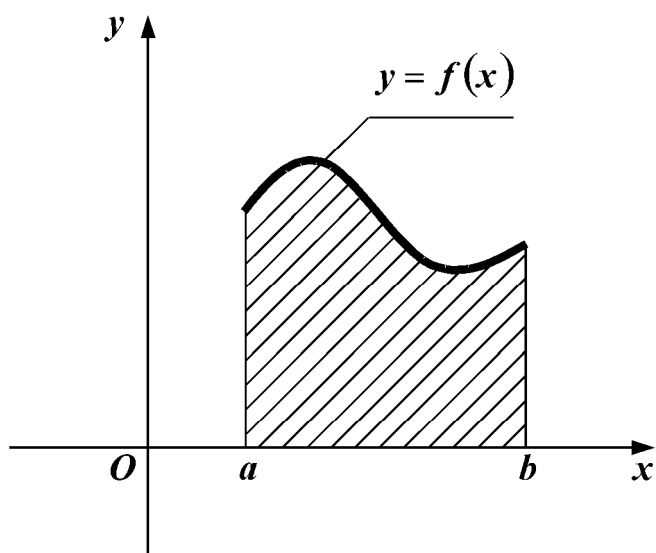
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})],$$

де n - парне число.

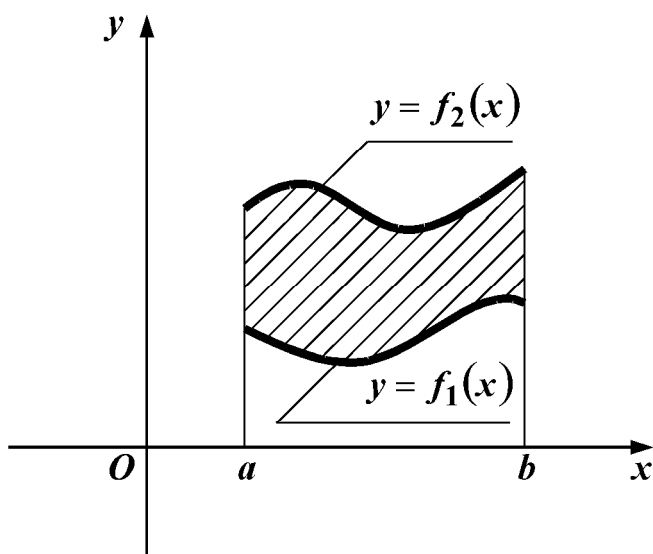
Формули для розв'язування прикладних задач

1. Площа плоскої фігури

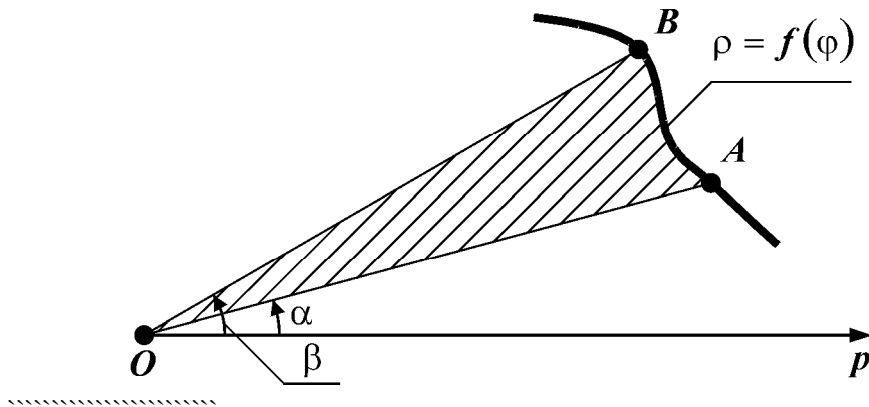
а) $S = \int_a^b f(x) dx$; $f(x) > 0$, (криволінійної трапеції).



б) $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$; $f_2(x) > f_1(x)$.



в) $S = \frac{1}{2} \int_b^a r^2(j) dj$, (для криволінійного сектора).



2. Довжина дуги

а) $l = \int_b^a \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$, якщо $y = y(x)$.

б) $l = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$, якщо $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, параметр $a \leq t \leq b$.

в) $l = \int_{j_1}^{j_2} \sqrt{r^2(j) + (r'_j)^2} dj$, якщо $r = r(j)$.

3. Об'єм тіл обертання

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx;$$

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy;$$

$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx, \text{ якщо } f_2(x) > f_1(x);$$

$$V_y = \pi \int_c^d [j_2^2(y) - j_1^2(y)] dy, \text{ якщо } j_2(y) > j_1(y).$$

4. Площа поверхні обертання

$$P_x = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

5. Невласні інтеграли з безкінечними границями

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \text{ де } c \text{ — довільне значення,}$$

$f(x)$ — всюди неперервна функція.

Якщо границя такого інтегралу є кінцевою, то такий інтеграл називається збіжним; у разі, коли інтеграл прямує до ∞ , його називають розбіжним.

6. Невласні інтеграли від розривних функцій

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

де $x = c$ — точка розриву функції, де

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{e \rightarrow 0^+} \int_a^{c-e} f(x) dx.$$

$$\int_c^b f(x) dx = \lim_{e \rightarrow 0^+} \int_{c+e}^b f(x) dx.$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА №3

Тема 1. Застосування похідної, функції кількох змінних

Література: [1] – [3].

При розв'язуванні задач на дослідження функцій і побудову графіків студенту необхідно знати: означення області існування функції; парності і непарності функції; умову періодичності функції; поняття зростаючої та спадаючої функції, умови зростання та спадання, пов'язані зі знаком першої похідної; поняття вигнутої та опуклої кривої, умови вгнутості та опуклості кривої, пов'язані зі знаком другої похідної; необхідні і достатні умови існування точки перегину; означення асимптоти та способи знаходження вертикальних і неvertикальних асимптот.

План дослідження функції:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки розриву функції, її лівосторонні та правосторонні границі в цих точках.
3. Визначити, чи є функція парною, непарною, періодичною.
4. Знайти точки перетину графіка функції з координатними вісями і інтервали знакосталості функцій.
5. Знайти точки екстремуму і інтервали зростання та спадання функції.
6. Визначити точки перегину графіка функцій і інтервали вгнутості та опуклості.
7. Знайти асимптоти графіка:
 - а) вертикальні,
 - б) неvertикальні.
8. Побудувати графік (попередньо побудувати асимптоти, нанести на графік точки перетину кривої з вісями координат та точки екстремуму і перегину).

Зауваження: Максимум (мінімум) функції, досягнутий в якійсь точці інтервалу повинний бути більше (менше) інших значень функції в

околі цієї точки. Максимум і мінімум функції може бути лише у внутрішніх точках відрізка.

Задача 1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до астроїди:

$$\begin{cases} x = 4 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases} \text{ в точці, якій відповідає параметр } t = \frac{p}{4}.$$

Розв'язок. Знаходимо координати точки дотику. При $t = \frac{p}{4}$

$$x' = \frac{dx}{dt} = 4 \cos^2 t \cdot (-3 \sin t) = -12 \cos^2 t \sin t$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = 4 \sin^2 t \cdot (3 \cos t) = 12 \sin^2 t \cos t$$

Отже, точка дотику є $M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Підрахуємо коефіцієнт k для дотичної

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{12 \sin^2 t \cos t}{-12 \cos^2 t \sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

Таким чином рівняння дотичної має вигляд

$$y - \sqrt{2} = - (x - \sqrt{2}), \text{ т.т. } y = -x + 2\sqrt{2}.$$

Рівняння нормалі в точці M_0 :

$$y - \sqrt{2} = x - \sqrt{2}, \text{ т.т. } y = x.$$

Задача 2. Дослідити функцію $y = \frac{1-x^3}{x^2}$. Побудувати графік.

Розв'язок.

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
2. В точці $x = 0$ функція має безкінечний розрив $\lim_{x \rightarrow 0} y = -\infty$.
3. Функція не є парною, непарною, періодичною.
4. Графік функції перетинає вісь Ox в точці $(1, 0)$ і не перетинає вісь Oy .

Зліва від точки розриву при $-\infty < x < 0, y > 0$; між точкою розриву і точкою перетину з віссю Ox при $0 < x < 1, y > 0$; справа від точки перетину з віссю Ox , при $1 < x < \infty, y < 0$.

$$5. \quad y' = -\frac{x^3 + 2}{x^3}; \quad y' = 0 \text{ в точці } x = -\sqrt[3]{2}, \text{ яка є критичною; } y' \text{ не існує}$$

в точці $x = 0$, але вона не є критичною, тому що є точкою розриву функції.

Дослідимо критичну точку по знаку y'' . Якщо $y''(x_0) < 0$, то функція в цій точці має максимум, якщо $y''(x_0) > 0$, то мінімум.

$$y'' = \frac{6}{x^4} > 0 \text{ @ } y''(-\sqrt[3]{2}) > 0,$$

тому робимо висновок, що $x = -\sqrt[3]{2}$ - точка мінімуму. Підраховуємо

$$y(-\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}. \text{ Зліва від точки мінімуму } -\infty < x < -\sqrt[3]{2}, y' < 0, \text{ функція спадає, на інтервалі } -\sqrt[3]{2} < x < 0, y' > 0 \text{ функція зростає, справа від точки розриву } 0 < x < \infty, y' < 0, \text{ функція спадає.}$$

$$6. \quad y'' = \frac{6}{x^4}, \quad y'' \neq 0, \text{ графік не має точок перегину. Всюди } y'' > 0, \text{ тому функція вгнута.}$$

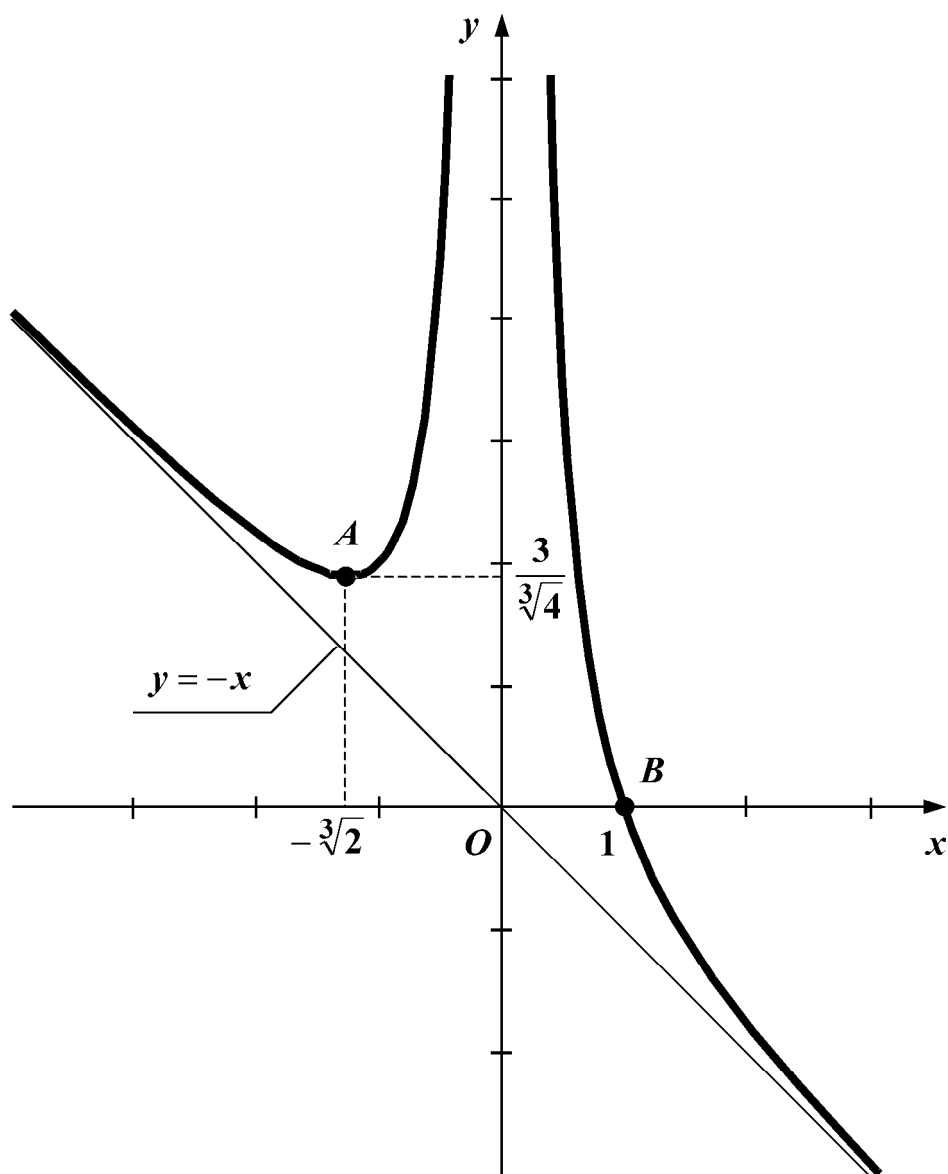
7. а) $x = 0$ (вісь ординат) є вертикальною асимптотою графіка;

$$б) \quad y = kx + b; \quad k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x^3}{x^3} = -1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1 - x^3}{x^3} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Тому рівняння асимптоти $y = x$.

8. Використовуючи всі дані дослідження, робимо графік (попередньо слід побудувати асимптоти, точки екстремуму, перегину графіка, точки перетину з осями координат). Знання інтервалів зростання і спадання функції, а також інтервалів вгнутості і опуклості функції допомагає виконати графік.



Задача 3. Знайти найбільше (найменше) значення функції

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3} \text{ на відрізку } [0,5].$$

Розв'язок. Найбільше (найменше) значення функції на відрізку досягається як в точках екстремуму функції, які є стаціонарними точками, так і на кінцях відрізка. Тому задача може бути розв'язана шляхом порівняння значень функції в критичних точках і на кінцях відрізка.

$$y' = x^2 - 4x + 3; \quad y' = 0; \quad x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$x_1 = 1, \quad x_2 = 3$ - критичні точки.

$$\text{Обчислюємо } f(3) = \frac{1}{3} \times 3^3 - 2 \times 3^2 + 3 \times 3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3},$$

$$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 - \frac{1}{3} = 1.$$

На кінцях відрізка

$$f(0) = -\frac{1}{3}; \quad f(5) = 6\frac{1}{3}.$$

Порівнюючи між собою значення функції, ми бачимо, що при $x = 5$ функція приймає найбільше значення, а найменше значення при $x = 3$ та $x = 0$.

Задача 4. Дощова капля, початкова маса якої дорівнює m , падає під дією сили тяжіння, рівномірно випарюючись, таким чином, що маса, яка зникає, пропорційна часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Визначити, через скільки секунд після початку падіння кінетична енергія буде найбільшою.

При розв'язуванні задачі опором повітря знехтувати.

Розв'язок. Кінетична енергія рухомого тіла $E = \frac{mu^2}{2}$, де m - маса тіла, u - швидкість. Маса змінюється відносно часу. Якщо в початковий момент маса m_0 , то в момент часу t вона дорівнює $m_0 - kt$. Швидкість падаючого тіла при відсутності опору $v = qt$, де q - прискорення, тому

$$E = \frac{1}{2}(m_0 - kt)q^2t^2.$$

Треба знайти найбільше значення функції

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}q^2(2m_0t - 3kt^2) = 0, \text{ корені рівняння } t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2m_0}{3k}.$$

При $t = 0$ $E = 0$ і не досягає найбільшого значення.

$$\text{При } t = t_2 = \frac{2m_0}{3k} \quad E = \frac{2m_0^2q^3}{27k^2}; \quad \text{при } t < \frac{2m_0}{3k} \quad \frac{dE}{dt} > 0, \text{ а при}$$

$$t > \frac{2m_0}{3k} \quad \frac{dE}{dt} < 0, \text{ тому при } t = \frac{2m_0}{3k} \quad E_k \text{ буде максимальна.}$$

Тема 2. Функції кількох змінних

Література: [1] – [4].

При вивченні багатьох змінних явищ ми, як правило, зустрічаємося із функціями двох і більше незалежних змінних. Вони дозволяють відображати більш складні залежності, ніж функція однієї змінної. Тому теорія функції багатьох змінних має велике практичне застосування. Символічно функціональна залежність позначається $U = f(x, y, z, \dots, t)$, де x, y, z, \dots, t є незалежні змінні або аргументи. Функція двох змінних $z = f(x, y)$ геометрично зображується поверхнею у просторі. Одним із найважливіших понять при вивченні даної теми є поняття диференційованості функції $f(x, y)$ в точці, що означає існування дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у відповідній точці.

У випадку, коли функція $f(x, y)$ диференційована у даній точці $M_0(x_0, y_0)$ її прирощення, $Df(x, y) = f(x + Dx, y + Dy) - f(x, y)$ можна замінити наближено диференціалом цієї функції.

При диференціюванні функції двох і більше аргументів необхідно мати досвід диференціювання складних функцій однієї змінної, знати правила їх диференціювання.

Похідні неявно і параметрично заданих функцій знаходяться на основі диференціювання складних функцій. У вказаних підручниках є достатньо прикладів на правила диференціювання, і студент перед виконанням відповідної контрольної роботи повинен їх проаналізувати.

Задача 1. Обчислити наближено значення виразу $\frac{\sin 1,49 \times \arctg 0,07}{2^{2,95}}$.

Розв'язок. Цей вираз відповідає конкретному значенню функції трьох змінних $j(x, y, z) = 2^x \times \sin y \times \arctg z$ в точці $M_1(-2,95; 1,49; 0,07)$. Нехай близькою до неї за координатами є точка

$M_0\left(\frac{x}{e} - 3, \frac{p}{2}, 0\frac{\ddot{o}}{\emptyset}\right)$. Тоді

$$dx = -2,95 - (-3) = 0,05;$$

$$dy = 1,49 - 1,57 = -0,08, \quad dz = 0,07$$

$$j(M_0) = 2^{-3} \sin \frac{p}{2} \times \arctg 0 = 0.$$

$$j_x(M_0) = \left(2^x \ln 2 \times \sin y \times \arctg z \right) \Big|_{M_0} = 0$$

$$j_y(M_0) = \left(2^x \times \cos y \times \arctg z \right) \Big|_{M_0} = 0$$

$$j_z(M_0) = \frac{2^x \times \sin y}{1 + x^2} \Big|_{M_0} = 2^{-3}.$$

Скористаємось формулою

$$j(x_1, y_1, z_1) \approx j(x, y, z) \Big|_{M_0} + dj(x, y, z) \Big|_{M_0},$$

звідки

$$\frac{\sin 1,49 \times \arctg 0,07}{2^{2,95}} = 2^{-3} \times 0,07 \approx 0,01.$$

Обчислення виконані із точністю другого знака після коми ($d = 10^{-2}$).

Задача 2. Знайти часткові похідні, якщо $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

Розв'язок. При диференціюванні по аргументу x , вважаємо y сталою величиною

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \times \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \times \frac{1}{y} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}};$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \times \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \times \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = - \frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}.$$

Задача 3. $z = u^2 v - v^2 u$, де $\begin{cases} u = x \cos y \\ v = y \sin x \end{cases}$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язок.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} = (2uv - v^2) \cos y + (u^2 - 2uv) y \cos x,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{I} z}{\mathbb{I} y} &= \frac{\mathbb{I} z}{\mathbb{I} u} \times \frac{\mathbb{I} u}{\mathbb{I} y} + \frac{\mathbb{I} z}{\mathbb{I} v} \times \frac{\mathbb{I} v}{\mathbb{I} y} = (2uv - v^2) \times (-x \sin y) + (u^2 - 2uv) \times \sin x = \\
&= (2xy \sin x \cos x - y^2 \sin^2 x) (-x \sin y) + \\
&\quad + (x^2 \cos^2 y - 2xy \sin \cos y) \times xy \sin x \sin y (y \sin x - 2x \cos y) + \\
&\quad + xy \times \cos x \cos y (x \cos y - 2y \sin x).
\end{aligned}$$

Задача 4. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці $M_0(1,0,0)$.

Розв'язок. Скористаємось рівняннями:

$F_x^z(M_0)(x - x_0) + F_y^z(M_0)(y - y_0) + F_z^z(M_0)(z - z_0) = 0$ - рівняння дотичної площини;

$$\frac{x - x_0}{F_x^z(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y^z(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z^z(M_0)} - \text{рівняння нормалі.}$$

$$z = \ln(x^2 + y^2), \quad F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2) - z.$$

$$F_x^z = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad F_x^z(M_0) = \frac{2 \times 1}{1^2 + 0^2} = 2; \quad F_y^z = \frac{2y}{x^2 + y^2}; \quad F_y^z(M_0) = 0;$$

$$F_z^z = -1; \quad F_z^z(M_0) = -1.$$

Отже шукані рівняння дотичної площини і нормалі мають вигляд :

$$2(x - 1) + 0(y - 0) + (-1)(z - 0) = 0;$$

$2x - z - 2 = 0$ – рівняння дотичної площини;

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{-1} \quad \text{або} \quad \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1} \quad \text{– рівняння нормалі.}$$

Задача 5. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

Розв'язок. Знаходимо частинні похідні

$$z'_x = 3x^2 + y^2 + 6y, \quad z'_y = 2xy + 6x.$$

Стационарні точки визначимо із системи

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 6y = 0 \\ 2xy + 6x = 0 \end{cases}, \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3x^2 + y^2 + 6y = 0 \\ x(y + 3) = 0 \end{cases} \quad \hat{U}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 6y = 0 \\ x = 0 \\ 3x^2 + y^2 + 6y = 0 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Розв'язуючи ці системи, отримаємо чотири стаціонарні точки $M_1(0;0)$; $M_2(0;-6)$; $M_3(-\sqrt{3};-3)$; $M_4(\sqrt{3};-3)$. Для того, щоб встановити чи буде мати функція екстремум в зазначених точках, обчислюємо значення виразу $D = AC - B^2$, де $A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{yy}(M_0)$.

$$Z''_{xx} = 6x; \quad Z''_{xy} = f''_{xy} = 2y + 6; \quad Z''_{yy} = f''_{yy} = 2x.$$

Для т. $M_1(0;0)$:

$$A = f''_{xx}(M_1) = 6 \times 0 = 0;$$

$$B = f''_{xy}(M_1) = 2 \times 0 + 6 = 6;$$

$$C = f''_{yy}(M_1) = 2 \times 0 = 0;$$

$$D = 0 \times 0 - 6^2 = -36.$$

Так як $D < 0$, то в т. M_1 екстремуму немає.

Для т. $M_2(0; -6)$:

$$A = f_{xx}''(M_2) = 6 \times 0 = 0;$$

$$B = f_{xy}''(M_2) = 2 \times 0 - 6 = -6;$$

$$C = f_{yy}''(M_2) = 2 \times 0 = 0;$$

$$D = 0 \times 0 - (6)^2 = -36 \text{ екстремуму немає.}$$

Для т. $M_3(-\sqrt{3}; -3)$:

$$A = f_{xx}''(M_3) = -6\sqrt{3};$$

$$B = f_{xy}''(M_3) = 2 \times (-3) + 6 = 0;$$

$$C = f_{yy}''(M_3) = -2\sqrt{3};$$

$$D = (-6\sqrt{3})(-2\sqrt{3}) - 0^2 = 36.$$

Так як $D = 36 > 0$, то дана функція в т. M_3 досягає екстремуму, причому, максимуму, тому що $A = -6\sqrt{3} < 0$.

$$Z_{max} = (x^3 + xy^2 + 6xy) \Big|_{\substack{x=-\sqrt{3} \\ y=-3}} = 6\sqrt{3}.$$

Для т. $M_4(\sqrt{3}; -3)$:

$$A = f_{xx}''(M_4) = 6\sqrt{3};$$

$$B = f_{xy}''(M_4) = 0;$$

$$C = f_{yy}''(M_4) = 2\sqrt{3};$$

$$D = 6\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} - 0^2 = 36.$$

Так як $D > 0$, то дана функція в т. M_4 досягає екстремуму, причому, мінімуму, тому що $A = 6\sqrt{3} > 0$.

$$Z_{min} = (x^3 + xy^2 + 6xy) \Big|_{\substack{x=\sqrt{3} \\ y=-3}} = -6\sqrt{3}.$$

Завдання до контрольної роботи №3

1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до гіперболи $y = \frac{1}{x-2}$ в точці з абсцисою $x = 1$. Побудувати лінії.
2. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 = 0$ в точках перетину її з віссю OY . Побудувати лінії.
3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $y = x^3 + 2$ в точці з абсцисою $x = 2$. Побудувати лінії.
4. Написати рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 = 9$ в точці перетину прямої $y = 2x$ із колом. Побудувати лінії.
5. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ в точці з абсцисою $x = 2a$.
6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до астроїди $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру $t = \frac{p}{3}$. Побудувати.
7. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $y = \frac{2x^2 - 6x}{x + 1}$ в точці з абсцисою $x = 2$.
8. Скласти рівняння дотичних до астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ в точках перетину її із прямою $y = x$.
9. Записати рівняння дотичної і нормалі до циклоїди $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ в точці, що відповідає значенню параметра $t = \frac{p}{2}$.
10. Записати рівняння дотичної і нормалі до лінії $y = e^{x^2-2}$ в точці з абсцисою $x = 2$. Побудувати лінії.

11-20. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на $[a, b]$.

11. $f(x) = e^{x^2 - 2x}; \quad [0; 3]$.

12. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}; \quad [-2; 3]$.

13. $f(x) = 2^{x^3 - 3x}; \quad [-2; 2]$.

14. $f(x) = e^{-x^2 + 4x}; \quad [-2; 3]$.

15. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x; \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

16. $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x; \quad \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

17. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; \quad [-3; 2]$.

18. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}; \quad [-1; 4]$.

19. $f(x) = \ln(x^2 + 4); \quad [-2; 2]$.

20. $f(x) = \log_8(x^4 + 1); \quad [\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{26}]$.

21. Периметр рівнобічного трикутника дорівнює 16. Якими повинні бути його сторони, щоб об'єм конуса, утвореного обертанням цього трикутника навколо висоти, яка проведена до основи, був найбільшим?

22. Розкласти число 16 на доданки так, щоб добуток їх був найбільшим.

23. Яке додатне число, складене з оберненим до нього дає найменшу суму?

24. Знайти число, яке б перевищувало свій квадрат на максимальне значення.

25. Дві сторони паралелограма лежать на сторонах даного трикутника, а одна із його вершин належить третій стороні. При яких умовах площа паралелограма є найбільшою?

26. Серед рівнобічних трикутників із заданою бічною стороною a знайти трикутник із найбільшою площею.

27. Бічні сторони і менша основа трапеції мають однакові довжини по

50 см. Знайти розмір більшої основи, при якій площа трапеції була б найбільшою.

28. Число 18 розбити на такі два доданки, щоб сума квадратів була найменшою.

29. В яке коло можна вписати прямокутник найбільшої площі із периметром 56 см.

30. Яку найбільшу прямокутну ділянку землі можна обгородити 120 метрами сітки?

31-40. Дослідити методами диференціального зчислення функцію $y = f(x)$ і, використовуючи результати дослідження, побудувати її графік.

31. $y = e^{-x^2}$;

32. $y = (2 + x^2) \times e^{-x^2}$;

33. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$;

34. $y = (x - 3)\sqrt{x}$;

35. $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$;

36. $y = x - 2\arctg x$;

37. $y = \sin x - \cos x$;

38. $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$;

39. $y = \ln(4 - x^2)$;

40. $y = x^2 - 2\ln x$.

41-50. Обчислити часткові похідні функції.

41. а) $z = \ln^2 \frac{x}{x-y} + \frac{1}{x-y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$;

б) $x^4 y - y^4 x = a^4$; $\frac{dy}{dx} = ?$;

в) $u = e^{x^2 - \sqrt{y}}$; $\frac{\partial x}{\partial t} = \sin t$; $\frac{du}{dt} = ?$;
 $\frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{t}$;

г) $z = x^{\sqrt{y}}$. Довести, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

42. а) $z = \sqrt{\arctg \frac{x^2}{3y-5}}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$;

$$\text{б)} x^2 e^{3y} + y^2 e^{3x} - 2e^{xy} = 0 \quad \frac{dy}{dx} = ?;$$

$$\text{в)} z = \sqrt{u^2 - \frac{1}{v}}; \quad \begin{cases} u = x \cos y \\ v = y \sin x \end{cases}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?;$$

$$\text{г)} z = \cos^2(2x + 3y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ? \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ? \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?.$$

$$43. \text{ а)} z = \operatorname{tg} \ln \frac{x}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?; \quad \text{б)} x^{\frac{1}{y}} + y^{\frac{1}{x}} = a^{3/2}; \quad \frac{dy}{dx} = ?;$$

$$\text{в)} u = \arcsin \frac{x}{y^2}; \quad y = e^{x^3}; \quad \frac{dy}{dx} = ?;$$

$$\text{г)} z = \ln(x^2 + y^2), \text{ ДОВЕСТИ, ЩО } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

$$44. \text{ а)} z = \operatorname{tg} \frac{x}{y} \times \operatorname{ctg} \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?;$$

$$\text{б)} \cos(xy^2) - e^{x-2y} - x^2 \sqrt{y} = 0; \quad \frac{dy}{dx} = ?;$$

$$\text{в)} z = u^2 \ln v; \quad u = \frac{x^2}{y}; \quad v = \frac{y^2}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?;$$

$$\text{г)} w = e^{x^2 y z^3}; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = ?.$$

$$45. \text{ а)} z = (1 + xy)^{y+1}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?; \quad \text{б)} y^2 \sqrt{x} = e^{y^3}; \quad \frac{dy}{dx} = ?;$$

$$\text{в)} w = \ln(\sqrt{x} - xy^2 + z); \quad \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = \sin 2t \end{cases}; \quad \frac{dw}{dt} = ?;$$

$$\text{г)} z = e^{xy^3}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?.$$

$$46. \text{ а)} w = \frac{u^2 - 1}{v^2 + 3}; \quad \begin{cases} u = 4^{x-2y} \\ v = e^{x-2y} \end{cases}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial w}{\partial y} = ?;$$

$$\text{б) } y^2 e^{\sqrt{x}} + e^{y^2-2} = 0; \quad \frac{dy}{dx} = ?;$$

$$\text{в) } z = \operatorname{tg}^3(3u - 2v); \quad \begin{cases} \frac{1}{t} u = \sin 3t \\ \frac{1}{t} v = \cos 3t \end{cases}; \quad \frac{dz}{dt} = ?;$$

$$\text{г) } z = e^{x^2 y}; \quad \frac{\mathbb{I}^3 z}{\mathbb{I}x \mathbb{I}y^2} = ?.$$

$$47. \text{ а) } z = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} x - \frac{1}{y} \frac{\ddot{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{C}} y - \frac{1}{x} \frac{\ddot{\mathfrak{O}}}{\mathfrak{O}}; \quad \frac{\mathbb{I}z}{\mathbb{I}x} = ? \quad \frac{\mathbb{I}z}{\mathbb{I}y} = ?;$$

$$\text{б) } e^x \times y - \ln \frac{x}{y} - 2\sqrt{x} = 0; \quad \frac{dy}{dx} = ?;$$

$$\text{в) } z = \operatorname{tg} \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} 2u^2 - \frac{1}{v} \frac{\ddot{\mathfrak{O}}}{\mathfrak{O}}; \quad \begin{cases} \frac{1}{t} u = \sin^2 t \\ \frac{1}{t} v = \cos^2 t \end{cases}; \quad \frac{dz}{dt} = ?;$$

$$\text{г) } z = \ln(y^2 + xy); \quad \frac{\mathbb{I}^2 z}{\mathbb{I}x \mathbb{I}y} = ?.$$

$$48. \text{ а) } u = x^{\frac{y}{z}}; \quad \frac{\mathbb{I}u}{\mathbb{I}x} = ? \quad \frac{\mathbb{I}u}{\mathbb{I}y} = ? \quad \frac{\mathbb{I}u}{\mathbb{I}z} = ?;$$

$$\text{б) } 2^{x^2-y^3} + \sin x \times \cos y - \sqrt{xy} = 0; \quad \frac{dy}{dx} = ?;$$

$$\text{в) } u = \ln^2(x + e^y); \quad y = \sin x; \quad \frac{du}{dt} = ?;$$

$$\text{г) } w = e^{x^2 y^2 z^2}; \quad \frac{\mathbb{I}^3 w}{\mathbb{I}x \mathbb{I}y \mathbb{I}z} = ?.$$

$$49. \text{ а) } z = \frac{e^{2x} - e^{2y}}{e^{2x} + e^{2y}}; \quad \frac{\mathbb{I}z}{\mathbb{I}x} = ? \quad \frac{\mathbb{I}z}{\mathbb{I}y} = ?;$$

$$\text{б) } e^{x^2-z^2} - e^{y^2-x^2} - 5^{xy} = 0; \quad \frac{\mathbb{I}z}{\mathbb{I}x} = ? \quad \frac{\mathbb{I}z}{\mathbb{I}y} = ?;$$

$$\text{в) } w = \ln^2 \frac{u}{v}; \quad \begin{cases} \frac{1}{t} u = t - \sin t \\ \frac{1}{t} v = t + \cos t \end{cases}; \quad \frac{dw}{dt} = ?;$$

$$\text{г) } z = \sin(2xy); \quad \frac{\mathbb{I}^3 z}{\mathbb{I}x \mathbb{I}y^2} = ?.$$

50. а) $w = 4^{\frac{x^2 - y^2}{z}}$; $\frac{\partial w}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial w}{\partial y} = ?$ $\frac{\partial w}{\partial z} = ?$;

б) $\sin(xy) - \sin(yz) - \cos(xz) = 0$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$;

в) $w = \operatorname{tg}^3 \frac{\sqrt{u}}{v}$; $u = \sin \frac{x}{y}$; $v = \cos \frac{y}{x}$; $\frac{\partial w}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial w}{\partial y} = ?$;

г) $z = \ln(e^x + e^y)$; довести, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}^2 = 0$.

51-60. Дана функція $z = f(x, y)$ і дві точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$. Необхідно: а) обчислити значення z в точці B ; б) обчислити наближене значення z_1 в точці B , виходячи із значення z_0 функції в точці A і замінюючи прирощення функції при переході від точки A в точку B диференціалом; в) оцінити в процентах відносну похибку, яка утворюється при заміні прирощення функції диференціалом; г) скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в точці $C(x_0, y_0, z_0)$; д) дослідити функцію на екстремум.

51. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; $A(1, 2)$, $B(1,02; 1,96)$.

52. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$; $A(1, 3)$, $B(1,06; 2,92)$.

53. $z = (x - 1)^2 + 2y^2$; $A(3, 2)$, $B(2,98; 2,03)$.

54. $z = x^2 + y^2 + 4xy - 2x + y$; $A(1, -1)$, $B(1,01; -0,98)$.

55. $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$; $A(2, 3)$, $B(1,98; 3,01)$.

56. $z = x^3 - 3x^2 - 3y^2 - 6y$; $A(-2, 2)$, $B(-1,97; 2,04)$.

57. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y - 1$; $A(4, 3)$, $B(3,96; 3,04)$.

58. $z = x^2 - 4x - 2y^2 + 4y + 4$; $A(3, -2)$, $B(3,04; -2,02)$.

59. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$; $A(-3, 4)$, $B(-2,95; 4,02)$.

60. $z = x^3 - 3x - 4y^2 + 5y$; $A(-2, 3)$, $B(-2,03; 2,94)$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4

Тема 1. Невизначений інтеграл

Література:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Підручник в 2-х томах , т.1. – М.: Интеграл-Пресс, гл. X, С.299-339, § 1-14; гл. XI, § 1-6, С. 340-397.
2. Вища математика. Збірник задач під редакцією В.П. Дубовика , І.І. Юрик. – Київ: Видавництво “А.С.К.”, 2003.– 480 с.
3. Вища математика. Збірник задач за редакцією П.П. Овчиннікова , ч. I,II, Київ: Техніка, 2003 .– 380 с.
4. Данко П.Є., Попов А.Г., Кожевникова Г.Я. Вища математика у вправах та задачах. Ч.I.– М.: Вища школа, 2000.– 420 с.
5. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі.– Київ: Видавничий центр “Академік”, 2002.– 621 с.

Для набуття практичного досвіду слід розв’язати задачі, які запропоновані в кінці кожної глави підручника [1]. Методичні підходи до розв’язання задач по темі детально висвітлені в [4], [5].

Розділ “Інтегрування функцій” є дуже важливим для формування студента як майбутнього спеціаліста. Інтегрування є основою розв’язування диференціальних рівнянь, які описують процеси, що відбуваються в металургії, механіці та багатьох інших напрямках розвитку металургійної промисловості. Визначені інтеграли використовуються при розв’язуванні численних прикладних задач.

Перед вивченням теми студенту пропонується повторити формули диференціювання функцій. Студент повинен добре розуміти, що таке первісна функція і запам’ятати таблицю основних інтегралів. Знаходження більш складних інтегралів складається із послідовних перетворень, які базуються на знанні розділів алгебри та тригонометрії. У процесі цих перет-

ворень використовуються основні способи інтегрування: метод підстановки і метод інтегрування за частинами. У підручниках, які вказані в літературі, розглянуто велику кількість підходів до знаходження інтегралів.

Задача 1. Знайти $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$.

Розв'язок. Використовуємо заміну змінних $\ln x = t$, звідки $d \ln x = dt$ або $\frac{dx}{x} = dt$.

Тоді $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctg t + c = \arctg \ln x + c$.

Задача 2. Знайти $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 - \tg^2 x}}$.

Розв'язок. У підінтегральний вираз входить функція $\tg x$ і її похідна $\frac{1}{\cos^2 x}$, тому можна зробити заміну $\tg x = t$. Диференціюючи ліву і праву частину, знаходимо $d \tg x = dt$, тобто $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$.

Тоді

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 - \tg^2 x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + c = \arcsin \tg x + c.$$

Задача 3. Знайти $\int x \sin 5x dx$.

Розв'язок. При інтегруванні застосовуємо формулу інтегрування за частинами $\int u dv = uv - \int v du$. Вибираємо за функцію u множник x , тоді $du = \sin 5x dx$.

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du \\ \int x \sin 5x dx &= -\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{5} \int \cos 5x dx = -\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + c. \end{aligned}$$

Отже $\int x \sin 5x dx = -\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + c$.

Задача 4. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 6x - x^2}}$.

Розв'язок. Використовуємо формулу $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 6x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - (x^2 + 6x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - (x^2 + 6x + 9 - 9)}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - [(x + 3)^2 - 9]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{14 - (x + 3)^2}} = \arcsin \frac{x + 3}{\sqrt{14}} + c.$$

Задача 5. Знайти $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 2}$.

Розв'язок. Використовується універсальна тригонометрична підстановка

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \quad \textcircled{R} \quad x = 2 \arctg t; \quad \textcircled{R} \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2};$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Отже

$$\int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 2} = \int \frac{2dt}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} + 2} =$$

$$\int \frac{2dt}{1 - t^2 + 2t + 2t^2 + 2} = \int \frac{2dt}{t^2 + 2t + 3} = 2 \int \frac{dt}{(t^2 + 2t + 1) + 2} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{(t + 1)^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \arctg \frac{t + 1}{\sqrt{2}} + c = \sqrt{2} \arctg \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} + c.$$

Задача 6. Знайти $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} dx$.

Розв'язок. При знаходженні інтеграла користуємося методом розкладання раціонального дробу на суму елементарних дробів

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - 3x + 1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}, \\ 2x^2 - 3x + 1 &= A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x+1), \\ 2x^2 - 3x + 1 &= Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C.\end{aligned}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x .

$$\begin{array}{lcl} x^2 & \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases} & \begin{cases} 2 = A + B \\ -3 = -A + B + C \\ 1 = A + C \end{cases} \\ x^1 & \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases} & \begin{cases} 2 = 1 - C + B \\ -3 = 2C - 1 + B \\ A = 1 - C \end{cases} \\ x^0 & \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases} & \begin{cases} B = 0 \\ C = -1 \\ A = 2 \end{cases} \end{array};$$

Тоді,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} dx &= \int \frac{2}{x+1} dx - \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = 2 \ln|x+1| - \\ &- \int \frac{dx}{x^2 - 2 \times \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + 1} = 2 \ln|x+1| - \int \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \ln|x+1| - \\ &- \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2(x - \frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C = 2 \ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

Завдання до контрольної роботи № 4

1. а) $\int \frac{x^2 dx}{5 - x^6}$;
 б) $\int \ln(1 + x^2) dx$;
 в) $\int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$;
 г) $\int \cos^2 5x dx$;
2. а) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$;
 б) $\int x \ln(x - 1) dx$;
 в) $\int \frac{dx}{x^4 + 3x^2}$;
 г) $\int \cos^5 x dx$;
3. а) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}}$;
 б) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$;
 в) $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx$;
 г) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$;
4. а) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + 2 \sin^2 x}}$;
 б) $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$;
 в) $\int \frac{(x^2 - 3) dx}{x^4 + 10x^2}$;
 г) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;
5. а) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{1 + e^x}}$;
 б) $\int x \arctg x dx$;
 в) $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$;
 г) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$;
6. а) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 1}$;
 б) $\int x^2 e^{3x} dx$;
 в) $\int \frac{dx}{x^3 + x}$;
 г) $\int \sin 5x \sin 6x dx$;
7. а) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$;
 б) $\int \arcsin x dx$;
 в) $\int \frac{x dx}{x^3 - 1}$;
8. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2 \cos x}}$;
 б) $\int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx$;
 в) $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$;

$$\Gamma) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4 \cos x};$$

$$\Gamma) \int_0^1 \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x}) \sqrt{x}};$$

$$9. \quad \text{a)} \int_0^1 \frac{\arctg^3 x}{1 + x^2} dx;$$

$$10. \quad \text{a)} \int_0^1 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x + 1}};$$

$$\text{б)} \int_0^1 \arctg x dx;$$

$$\text{б)} \int_0^1 (x^2 + 1) e^{-2x} dx;$$

$$\text{в)} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^4 + 5x^2 + 4};$$

$$\text{в)} \int_0^1 \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1};$$

$$\Gamma) \int_0^1 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx;$$

$$\Gamma) \int_0^1 \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx;$$

Обчислити:

$$11. \quad \text{a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \sin 2x dx;$$

$$\text{б)} \int_0^2 \frac{dx}{(x - 1)^2};$$

$$12. \quad \text{a)} \int_0^1 x e^{-x} dx;$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx;$$

$$13. \quad \text{a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin \frac{x}{2} dx;$$

$$\text{б)} \int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x};$$

$$14. \quad \text{a)} \int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}};$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + x^2};$$

$$15. \quad \text{a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x};$$

$$\text{б)} \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x};$$

$$16. \quad \text{a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x};$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} dx;$$

$$17. \quad \text{a)} \int_0^1 \arcsin x dx;$$

$$\text{б)} \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4 - x)^2}};$$

$$18. \quad \text{a)} \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}};$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg x}{x^2 + 1};$$

$$19. \text{ а) } \int_e^{e^2} x^2 \ln x \, dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x e^{-x^2} \, dx ;$$

$$20. \text{ а) } \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} ;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \ln x \, dx .$$

21-30. Обчислити наближене значення визначеного інтегралу за допомогою формули Сімпсона, розбиваючи відрізок на 10 частин. Всі обчислення виконати із точністю до третього знака після коми.

$$21. \int_{-4}^6 \sqrt{x^4 + 9} \, dx ;$$

$$22. \int_{-3}^7 \sqrt{x^4 + 6} \, dx ;$$

$$23. \int_0^{10} \sqrt{x^3 + 2} \, dx ;$$

$$24. \int_1^{11} \sqrt{x^3 + 5} \, dx ;$$

$$25. \int_{-1}^9 \sqrt{x^3 + 4} \, dx ;$$

$$26. \int_2^{12} \sqrt{x^3 + 2} \, dx ;$$

$$27. \int_{-6}^4 \sqrt{x^3 + 1} \, dx ;$$

$$28. \int_4^{14} \sqrt{x^3 + 3} \, dx ;$$

$$29. \int_{-3}^7 \sqrt{x^3 + 5} \, dx ;$$

$$30. \int_3^{13} \sqrt{x^3 + 7} \, dx .$$

31. Знайти площу фігури, обмежену лініями $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$,
 $x = 3$, $x = 6$.

32. Обчислити довжину дуги $y = \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

33. Знайти площу фігури, обмежену лініями $x = 4(2 \cos t - \cos 2t)$;
 $y = 4(2 \sin t - \sin 2t)$,

34. Обчислити довжину дуги AB : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, якщо $A(-3, 0)$,

$$B\left(2, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right).$$

35. Обчислити довжину дуги $x = \cos^4 t$; $y = \sin^4 t$.

36. Знайти площу фігури, обмежену лініями $r = 4 \sin 3\theta$.

37. Обчислити довжину дуги $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 4$.

38. Знайти площу фігури, обмежену лініями $y = x^2 - 3x - 5$; $y = 3 - x$.

39. Обчислити довжину дуги AB : $y^2 = -6x + 5$, якщо $A(-1, -\sqrt{11})$,
 $B(0, 5; \sqrt{2})$.

40. Знайти площу фігури, обмежену лініями $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $x = -4$, $x = 3$.